Diversas Estrategias Heurísticas para la Solución de Problemas: Una Muestra de ...

Víctor M. Hernández L. y Martha C. Villalba G.

Abril del 2003

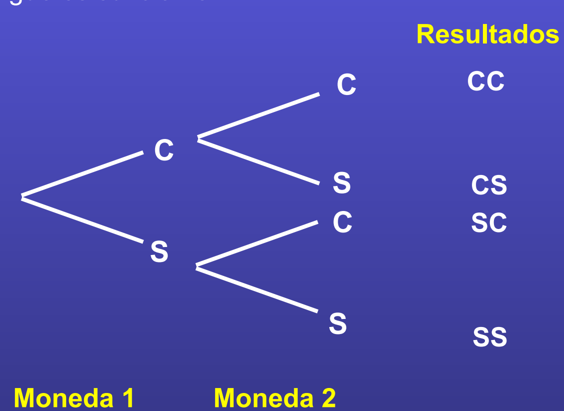
Esta es una muestra de problemas en cuya solución podrá experimentarse alguna de las estrategias propuestas por George Pólya en su *Método de los Cuatro Pasos*.

Particularmente, en cada uno de ellos se señalará –a manera de sugerencia- la o las estrategias favorables para su solución.

Estrategia 7: Dibujar un Diagrama

Con frecuencia hay problemas donde, aunque no es necesario dibujar una imagen real que represente icónicamente la situación, es útil utilizar un diagrama que represente la esencia del problema.

Por ejemplo, si deseamos determinar el número de veces en que aparecen dos caras cuando lanzamos dos monedas, podríamos literalmente dibujar icónicamente todos los posibles arreglos de las dos monedas mostrando caras o sellos. Sin embargo, en la práctica, un simple diagrama de árbol como el que sigue es suficiente:



Este diagrama muestra que hay solo una manera de obtener dos caras de los cuatro posibles resultados al lanzar las dos monedas.

Otro tipo de diagrama es útil en la resolución del siguiente problema.

Problema

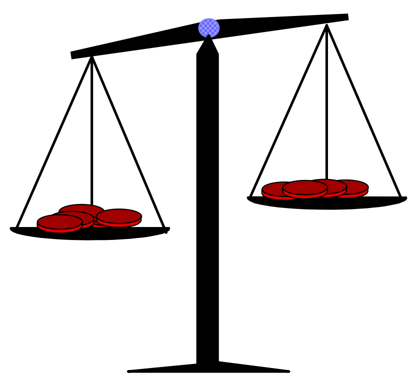
Se llevó a cabo una encuesta entre 150 estudiantes universitarios de primer ingreso. Cuarenta de ellos estaban especializándose en matemáticas, treinta en inglés, veinte estaban en ciencias, siete tenían una doble especialización de matemáticas e inglés y, ninguno tenía una segunda o tercer especialidad con ciencias. ¿Cuántos estudiantes tenían otras especialidades aparte de matemáticas, inglés o ciencias?

Estrategia 8: Usar Razonamiento Directo

La estrategia de usar razonamiento directo se usa virtualmente todo el tiempo junto a otras estrategias cuando se resuelven problemas. El razonamiento directo se usa para alcanzar una conclusión válida a partir de una serie de proposiciones. Con frecuencia las proposiciones que involucran el razonamiento directo son de la forma “Si A entonces B”. En el siguiente problema no se requieren cálculos, es decir, se puede obtener una solución por el mero uso del razonamiento directo y, tal vez, mediante algunos dibujos.

Problema

En un grupo de nueve monedas, ocho pesan lo mismo y la novena es más pesada. Asuma que las monedas son idénticas en apariencia. Usando una balanza de platillos, ¿cuál es el menor número de “pesadas” necesarias para identificar la moneda de más peso?

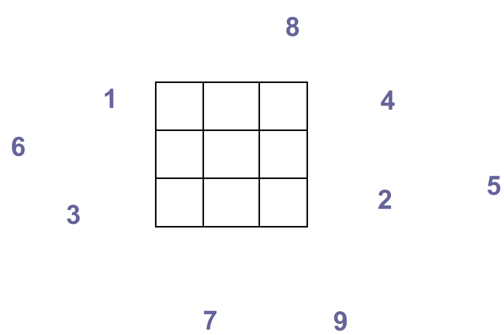


Estrategia 9: Usar Razonamiento Indirecto

En Matemáticas, ocasionalmente hay problemas que no son fácilmente solubles mediante el razonamiento directo. En tales casos, el **razonamiento indirecto** puede ser la mejor forma de resolver el problema. Una forma simple de abordar el razonamiento indirecto es el considerar una habitación vacía con solo dos entradas, digamos *A* y *B*. Si desea usar el razonamiento directo para probar que alguien entró a la habitación a través de *A*, debería vigilar esa entrada. Sin embargo, también podría usted probar que alguien entró por la puerta *A*, viendo la puerta *B*. Si una persona se introdujo a la habitación y no lo hizo a través de *B*, la persona tuvo que hacerlo a través de la entrada *A*. En matemáticas, para probar que una condición, digamos "C," es verdad, uno asume que la negación de *C*, es decir "*no C*" es verdadera y muestra que las consecuencias derivadas de ello son imposibles.

Problema

Los números enteros del 1 al 9 pueden ser acomodados en una matriz cuadrada de 3 X 3, tal que la suma de todos los números en cada uno de los reglones, columnas y diagonales es 15. Muestre que el 1 no puede estar en alguna de las esquinas.



Estrategia 10: Usar las Propiedades de los Números

Entender la naturaleza intrínseca de los números a menudo es útil en la solución de problemas. Por ejemplo, si se conoce que la suma de dos números pares es par y que un número impar al cuadrado es impar puede hacer más simple la verificación de algunos cálculos. La solución del problema que se plantea a continuación podrá parecer imposible a quien intente resolverlo ingenuamente, usando por ejemplo, una estrategia de ensayo y error. Por otro lado, la solución es inmediata para quien entiende el concepto de divisibilidad de números.

Problema

El administrador de una cadena de comida rápida lanzó un concurso para promover las ventas. Con cada compra a cada cliente se le daba una tarjeta con un número entero menor que 100 escrito en ella. Un premio de 1000 pesos se le daría a cualquier persona que presentara tarjetas cuyos números sumaran 100. Enseguida se muestran varias cartas típicas. ¿Puede usted encontrar una combinación ganadora?

3	9	12	15	18	27	51	72	84

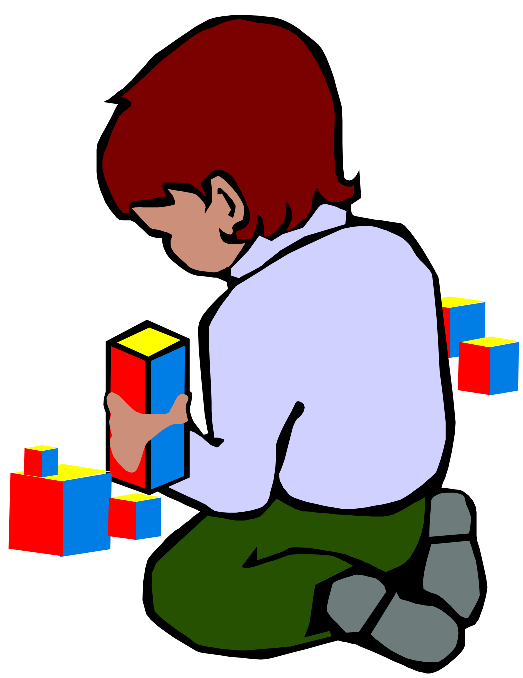
¿Puede usted sugerir cómo estructurar el concurso de tal modo que pueda haber a lo más 1000 ganadores en el país?

Estrategia 11: Resolver un Problema Equivalente

La interpretación o punto de vista propio de un problema puede algunas veces cambiar un problema aparentemente difícil en uno que es fácilmente soluble. Una manera de resolver el siguiente problema es a través de trazar un dibujo o, tal vez, por medio de encontrar algunos cubos realmente representativos o tratando con varias combinaciones. Por otro lado, una aproximación es ver si el problema puede reformularse en una forma equivalente, digamos como, usando números. Entonces, si el problema equivalente puede ser resuelto, la solución puede ser interpretada para guiar o para alcanzar una respuesta al problema original.

Problema

Un niño tiene un conjunto de 10 cubos. Las longitudes de sus lados son de 1 cm, 2 cm, 3 cm ..., 10 cm. Usando todos los cubos, ¿puede el niño construir dos torres de la misma altura colocando un cubo sobre otro? ¿por qué si o por qué no?

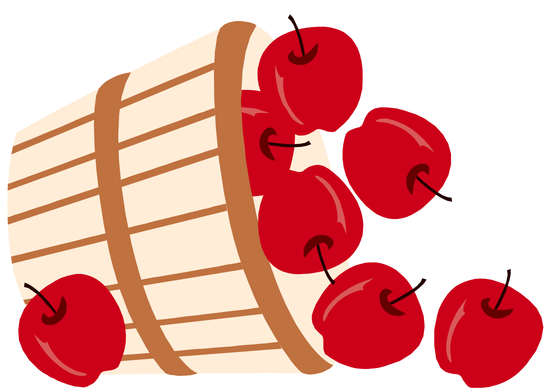


Estrategia 12: Trabajar hacia atrás

Normalmente, cuando usted empieza a resolver un problema, probablemente lo haga comenzando por el "principio" del problema y procediendo "hacia delante" hasta que llega a una respuesta al haber aplicado las estrategias apropiadas. Sin embargo, hay ocasiones, en las que en lugar de empezar por lo que establece el problema en un principio, es más conveniente empezar en lo que se establece al final del problema y trabajar hacia atrás. El problema que se enuncia enseguida puede ser resuelto mediante esta estrategia muy fácilmente.

Problema

Un vendedor ambulante tenía una canasta de manzanas. Sintiéndose generoso un día, regaló la mitad de sus manzanas mas una, al primer desconocido que encontró, la mitad de las manzanas que le quedaron más una se las dio al siguiente desconocido que encontró, y la mitad de las que le quedaban más una se las dio al tercer desconocido que encontró. Si el vendedor tenía finalmente una para él, ¿con cuántas manzanas empezó?



Estrategia 13: Usar casos

Muchos problemas pueden ser resueltos más fácilmente si se parte el problema en varios casos. Por ejemplo, considere la siguiente proposición: El cuadrado de cualquier número entero *n* es un múltiplo de 4 o un múltiplo de cuatro más uno. Para probar esto, necesitamos solamente considerar dos casos: *n* es par, o *n* es impar. Si *n* es par, entonces $n = 2x$ y $n^2 = 4x^2$, el cual es un múltiplo de 4. Si *n* es impar, entonces $n = 2x + 1$ y $n^2 = 4x^2 + 4x + 1$, el cual es un múltiplo de 4 mas uno. El siguiente problema puede ser resuelto fácilmente si se consideran varios casos para *a*, *b* y *c*.

Problema

Pruebe o refute: 2 es un factor de $(a - b)(b - c)(c - a)$ para cualesquiera enteros *a*, *b*, *c*. (Sugerencia: Intente primero con unos pocos de ejemplos)

a = 8, b = 5, c = 1

$(a – b)(b – c)(c – a)= -84$

Estrategia 14: Resolver una ecuación

Con frecuencia, cuando aplicamos la estrategia Usar una Variable para resolver un problema, la representación del problema conducirá a una ecuación. El siguiente problema proporciona tal situación.

Problema

La niñez de un hombre duró un sexto de su vida, el siguiente doceavo de su vida jugó foot ball, y se casó después de que transcurrió un séptimo más de su vida. El nacimiento de su hija aconteció cinco años después de su matrimonio y ésta hija vivió la mitad de los años que vivió su papá. Si el hombre murió cuatro años después de la muerte de su hija, ¿cuántos años tenía cuando este hombre murió?

Estrategia 15: Buscar una fórmula

La estrategia de buscar una fórmula es especialmente apropiada en problemas que involucran patrones numéricos. Esta, con frecuencia, extiende y refina la estrategia de Buscar un Patrón y proporciona información más general. Por ejemplo, en la secuencia numérica 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... observamos muchos patrones. Si quisiéramos conocer el 100-*ésimo* término de la secuencia podríamos finalmente generar varios de los términos siguientes a través del uso de patrones. De cualquier manera, con algo de investigación adicional, podemos establecer que la fórmula $T = 2^n - 1$ nos da el valor del *n-ésimo* término de la secuencia para $n = 1, 2, 3, \ldots$. De aquí que el 100-*ésimo* término puede encontrarse directamente mediante la expresión $2^{100} - 1$. El siguiente problema presenta una oportunidad de utilizar esta estrategia de Buscar una Fórmula.

Problema

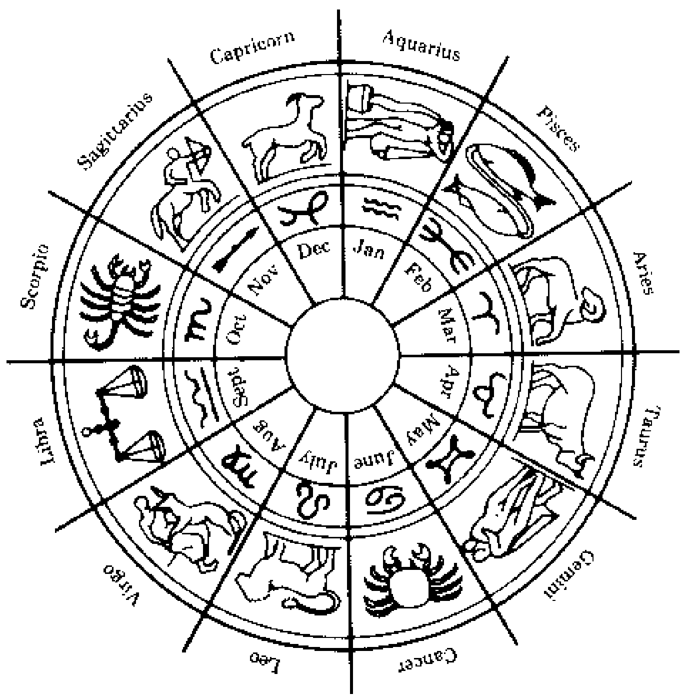
A un sirviente le fue solicitado que realizara un trabajo que podría llevarle 30 días. El pago que se le daría era de 1000 monedas de oro. El sirviente replicó, "Completaré felizmente el trabajo, pero me gustaría mejor que se pagara una moneda de cobre el primer día, dos monedas de cobre el segundo día, cuatro en el tercer día y así sucesivamente, con un pago del doble de monedas de cobre cada día". El rey estuvo de acuerdo con la forma de pago que el sirviente solicitó. Si una moneda de oro equivale a cien monedas de cobre, ¿hizo el rey una decisión correcta? ¿cuál fue el monto del pago solicitado por el sirviente?

Estrategia 16: Hacer una Simulación.

Una simulación es una representación de un experimento usando algunos objetos apropiados (tiras de papel, dados, canicas, etc...) o incluso algún programa de computadora adecuado para el caso. El propósito de una simulación es correr muchas réplicas de un experimento que en realidad sería muy difícil llevar a cabo. Como usted verá, en el siguiente problema, es más sencillo simular el problema que llevar a cabo el experimento real

Problema:

En una fiesta, un amigo le apuesta que al menos dos personas en un grupo de cinco desconocidos, pertenecerán al mismo signo astrológico. ¿Apostaría usted? ¿Por qué sí, o por qué no?

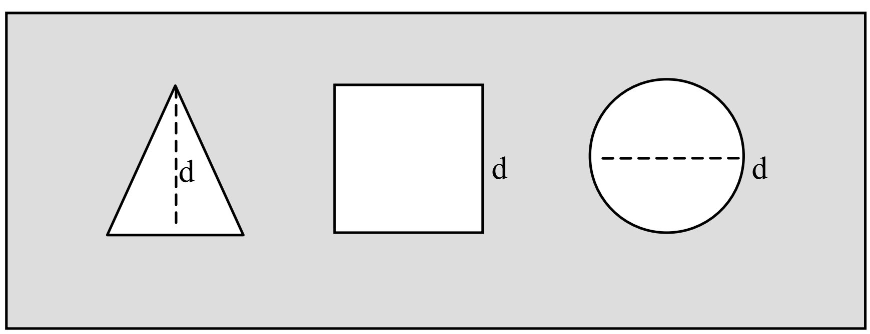


Estrategia 17: Usar un modelo.

La estrategia "Usar un Modelo" es muy útil en problemas que involucran figuras geométricas o sus aplicaciones. Con frecuencia adquirimos una iluminación matemática acerca del problema al estar viendo su concreción física en un modelo. Un modelo, entonces, es cualquier objeto físico que se asemeja al objeto buscado en el problema. Puede hacerse en algo tan simple como una figura en papel, o una forma en madera o plástico; incluso puede ser tan complicado como la construcción de una réplica cuidadosa como las que los arquitectos o ingenieros suelen usar.

Problema

Diseñe una forma sólida que pueda llenar cada uno de los espacios determinados por los contornos en esta lámina, al pasar a través de ellos.

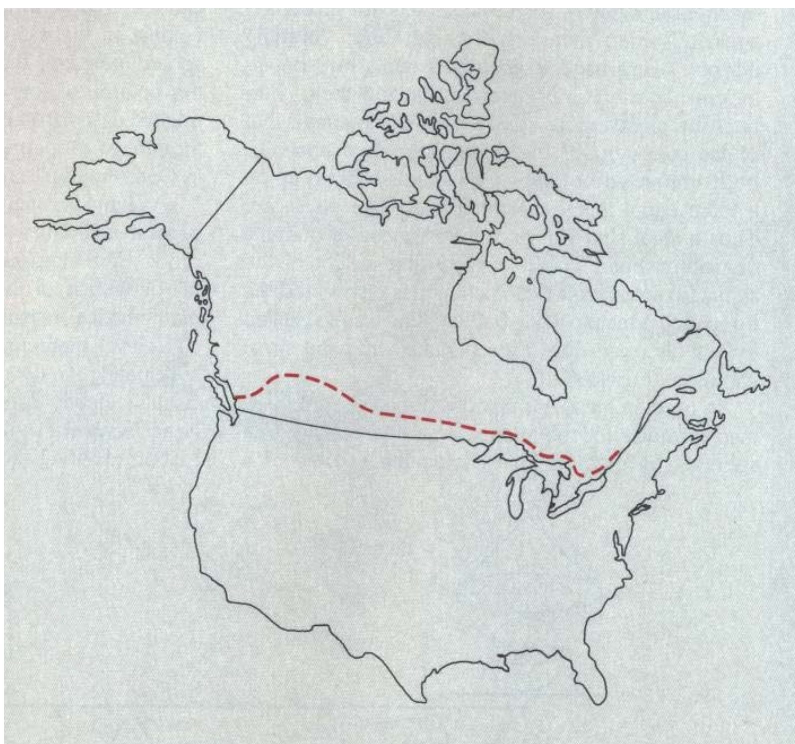


Estrategia 18: Usar análisis dimensional.

Esta estrategia es útil en problemas de aplicación que involucran conversiones entre unidades de medida. Por ejemplo problemas de distancia entre tiempo o bien problemas que involucran razones son, algunas veces, más fáciles de analizar vía el análisis dimensional. Además, este análisis nos permite verificar nuestras respuestas para ver si las hemos reportado en las unidades de medida correctas.

Problema:

David ha planeado un viaje a través de Canadá en motocicleta. Él determinó su ruta en un mapa y estimó la longitud era de 115 cm. La escala en este mapa es de 1 cm = 39 Km. . El consumo de gasolina de su motocicleta es en promedio de 75 millas por galón . Si la gasolina cuesta $1.25 (dólares) por galón, ¿qué tanto deberá considerar que gastará en gasolina? (¿Qué información adicional necesita?)

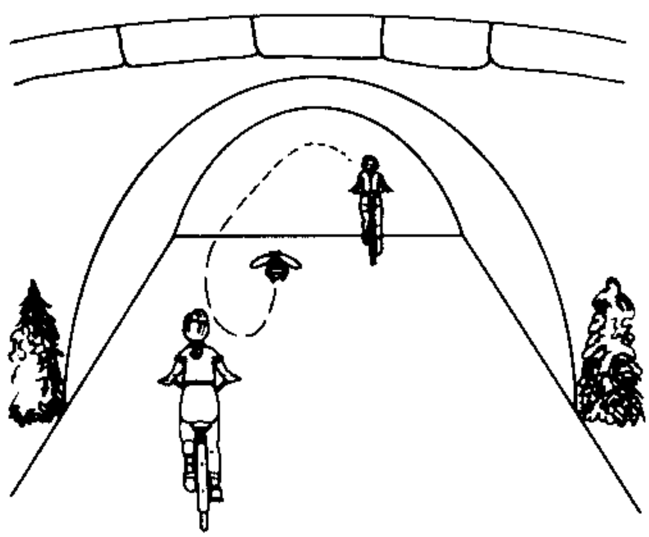


Estrategia 19: Identificar sub-metas.

Muchos problemas complejos pueden atacarse buscando “sub-metas”- o sea, resultados intermedios que conducen a la solución final. En lugar de buscar directamente una solución total para el problema, con frecuencia podemos obtener información por partes, y una vez que las juntamos, llegamos a la solución del problema completo. Una forma de identificar el uso de la estrategia de sub-metas es pensando en qué otra información desearíamos que nos proporcionara el enunciado del problema. Por ejemplo, diciendo “si yo supiera tal y tal cosa, lo podría resolver” sugiere una sub-meta, a saber, la información perdida

Problema.

Un ciclista con dirección hacia el Este entra a un túnel al mismo tiempo que un ciclista en sentido contrario (dirección Oeste), entra por el otro extremo del túnel. El ciclista que va en dirección hacia el Este avanza a una velocidad de 10 kilómetros por hora y el otro ciclista a una velocidad de 8 kilómetros por hora. Una mosca vuela de un ciclista a otro a una velocidad de 15 kilómetros por hora, partiendo desde el primer ciclista cuando éste entra al túnel. El túnel tiene 9 kilómetros de longitud. ¿Qué distancia ha recorrido la mosca cuando los ciclistas se encuentran?



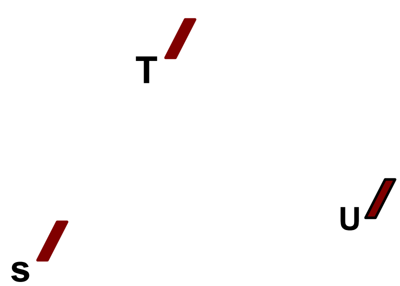
Estrategia 20 : Usar coordenadas.

En muchos problemas de geometría bidimensional, podemos usar una cuadrícula en el plano llamada sistema de coordenadas con el fin de obtener información numérica adicional. Por lo tanto, esta estrategia puede usarse para resolver problemas acerca de figuras bidimensionales. Los sistemas de coordenadas también se pueden usar en el espacio tridimensional.

Problema:

Un agrimensor trazó un lote triangular para construcción . Dibujó el siguiente diagrama y registró los datos que se muestran. ¿Cuál es el área del terreno en metros cuadrados? (Nota: “207 Este” significa 207 metros al Este de la estaca S.)

Estaca	Posición Relativa a S
U	207-Este, 35 -Norte
T	40 –Este, 185 -Norte



Estrategia 21: Usar Simetría.

En algunos problemas pueden darse varios tipos de simetría geométrica o numérica. La simetría geométrica involucra una correspondencia entre puntos y tal vez entre formas y medidas. Por ejemplo las acciones de deslizar o girar conducen a ciertos tipos de simetría. La simetría numérica se da, por ejemplo, cuando valores numéricos pueden ser intercambiados, y los resultados son equivalentes. Como una ilustración, suponga que se lanzan 5 monedas. Sabiendo que 3 caras y 2 sellos pueden ocurrir de 10 maneras, podemos determinar el número de maneras que 2 caras y 3 sellos pueden ocurrir; simplemente reemplazamos cada “cara“ por “sello“ y viceversa, usando el hecho de que cada arreglo de n caras y m sellos ($n + m = 5$) se corresponde con un arreglo de m caras y n sellos. Por ello concluimos que también hay 10 maneras para que puedan ocurrir 2 caras y 3 sellos.

Problema:

Las casas A y B están conectadas a una línea l de televisión por cable en un transformador situado en el punto P. ¿Dónde debería estar colocado el punto P de tal modo que la distancia dada por la suma $AP + PB$ sea la menor posible?