Del Orden al Caos

Por: Víctor M. Hernández L.

Marzo 2004.

El crecimiento demográfico es un tema que interesa a los biólogos, ecologistas y epidemiólogos, pero también a los matemáticos, pues detrás de las fórmulas engañosamente simples de un modelo del crecimiento demográfico se oculta una rica y variada conducta que va desde el orden más simple hasta el caos.

La historia abunda en poblaciones fuera de control: la liberación de una pequeña colonia de conejos en Australia cuyos descendientes hicieron estragos en su ecología; la conquista del nordeste de los Estados Unidos por la oruga de la lagarta que escapó de un laboratorio de Boston; la marea migratoria de las abejas asesinas; las oleadas de gripe que parecen dormir durante años y luego atraviesan el globo como epidemias, sólo para agonizar antes del comienzo del siguiente ciclo.

Algunas poblaciones se multiplican de prisa, otras se extinguen prontamente; algunas crecen y decrecen con periodicidad regular; otras se comportan de acuerdo con las leyes de atractores de diversa índole y el caos.

Abordemos el estudio del sistema demográfico de un parásito que viven en verano y muere con el frío después de poner los huevos. La *mariposa* llamada *lagarta* es un buen ejemplo.

Dando por sentado que un porcentaje similar de huevos de lagarta se empollan y sobreviven cada año, el tamaño de una colonia de larvas de este año está relacionado con la cantidad de larvas que se metamorfosearon en mariposas y desovaron el año anterior.

Supongamos que el tamaño de una colonia es de 100 lagartas y que la colonia se duplica cada año. Si el tamaño de la colonia es de 200 para el segundo año, para el siguiente será de 400, etc. ..., es decir que

$$X_{n+1} = 2X_n$$

Desde luego, no todas las poblaciones se duplican. Algunas pueden crecer con mayor velocidad. Si denominamos *N* a la tasa de natalidad, cada colonia es *N* veces mayor este año que el año anterior, esto es

$$X_{n+1} = NX_n$$

En 1845, P.F. Verhulst, un científico belga interesado en la matemática del crecimiento demográfico, introdujo un nuevo término para describir el modo en que una población se desarrolla en una zona cerrada.

En vez de la simple ecuación demográfica

$$X_{n+1} = NX_n$$

él añadió el término, $(1 - X_n)$;

$$X_{n+1} = NX_n(1 - X_n), \text{ donde } 0 \leq X_n \leq 1$$

de esta manera, el lado derecho de la ecuación contiene ahora dos términos "rivales".

Comentarios técnicos:

1. La restricción impuesta a los valores de X_n tiene que ver con un recurso matemático muy común e ingenioso denominado *normalización* , de tal forma que permite comparar la evolución de poblaciones de diferentes tamaños.

2. En esencia, la población está representada por un número que puede variar entre *0* y *1*. $X_n = 1$ representa entonces la máxima población posible, así como $X_n = 0.5$, representa la mitad de ese valor. No importa si hablamos de una población de varios centenares de lagartas o de decenas de miles de bacterias. Sólo interesa comparar la población del año anterior con la de este año.

La ecuación modificada de Verhulst tiene una multitud de aplicaciones. Los entomólogos han recurrido a ella para computar el efecto de las plagas en los huertos y los genetistas la usan para calibrar el cambio de frecuencia de ciertos genes en una población.

Se la ha aplicado también al modo en que se difunde un rumor: al principio un rumor se expande exponencialmente hasta que casi todos lo han oído. Luego la tasa decae velozmente, a medida que más personas opinan: "*Ahh ... si, ya lo había oído*".

El modelo de Verhuslt también se ha usado en las teorías del aprendizaje. El aprendizaje primero aumenta, pero al cabo de un cierto tiempo el estudiante se satura, de modo que los nuevos esfuerzos sólo producen resultados mínimos.

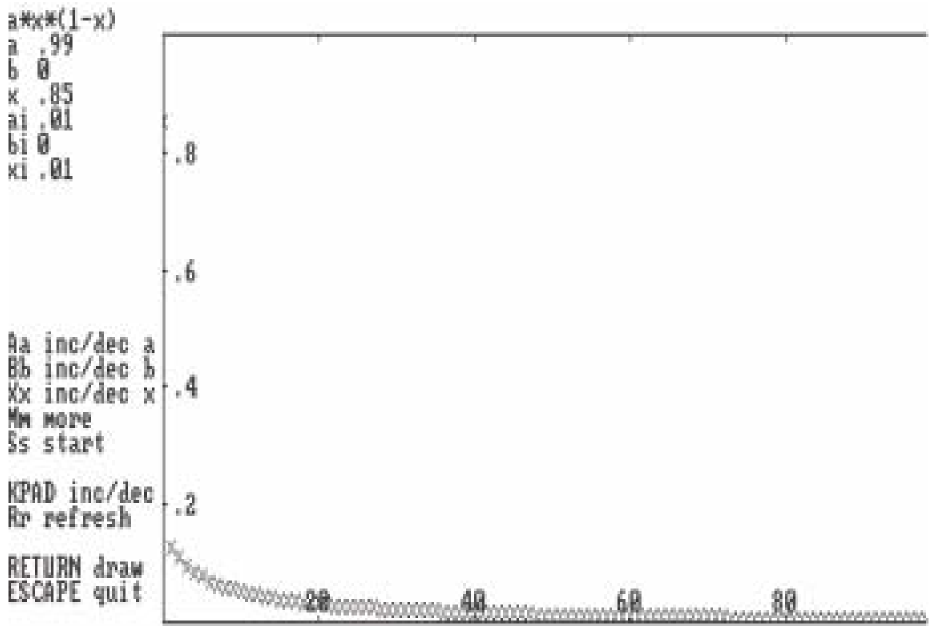
Como ejemplificaremos enseguida, en todas las situaciones en las cuales es aplicable la ecuación demográfica, acecha el potencial del Caos.

La metamorfosis no lineal de las lagartas

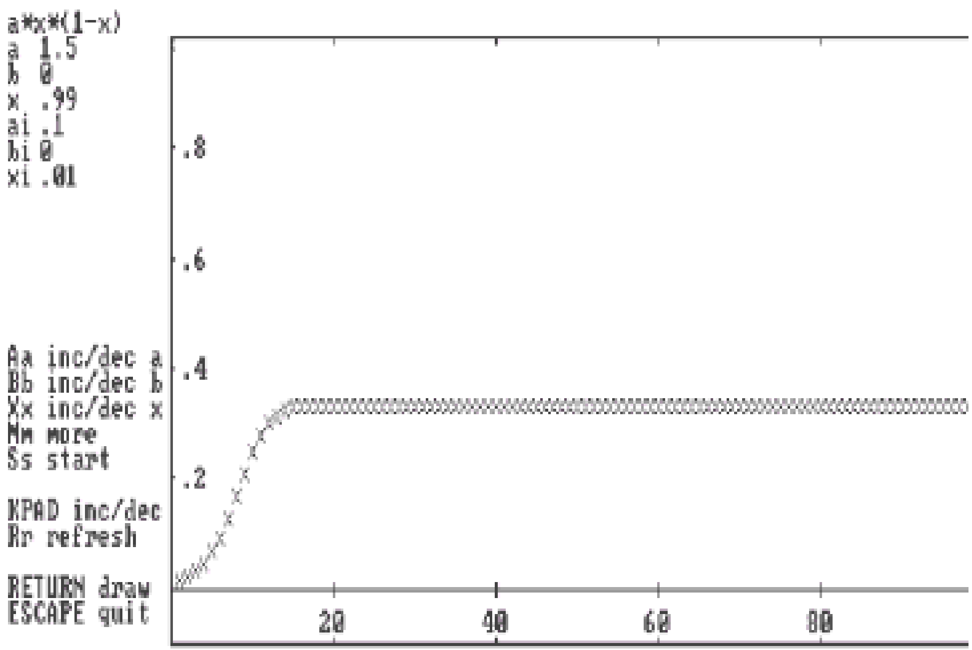
Comencemos con una población de larvas de lagarta a la cual se ha impuesto una forma de control de la natalidad, digamos rociándola con insecticida.

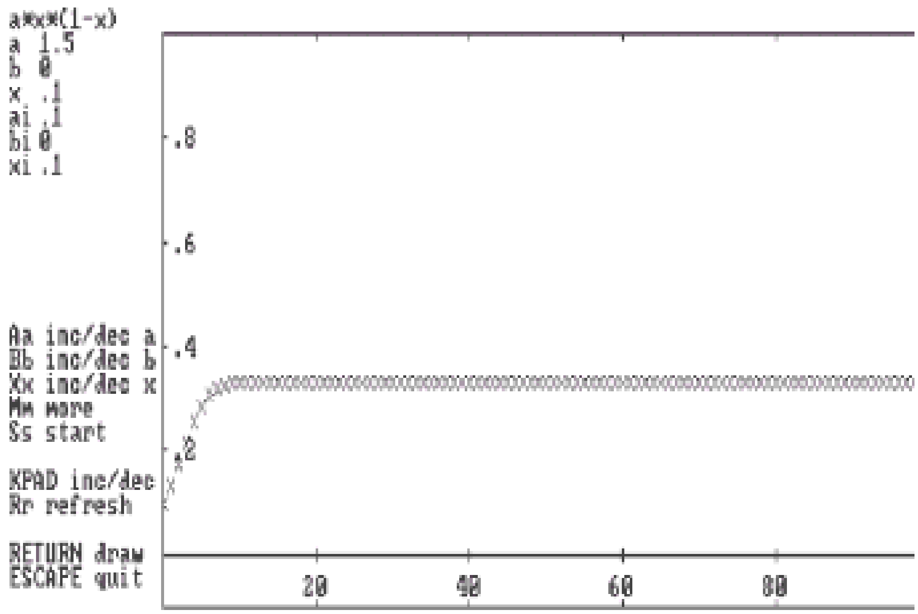
Dando por sentado que estas criaturas no sufran mutaciones, la población de cada año disminuirá un poco respecto de la del año anterior.

Si la tasa de natalidad es de *0.99*, aún una población muy numerosa llegará eventualmente a *0*. La colonia perece.

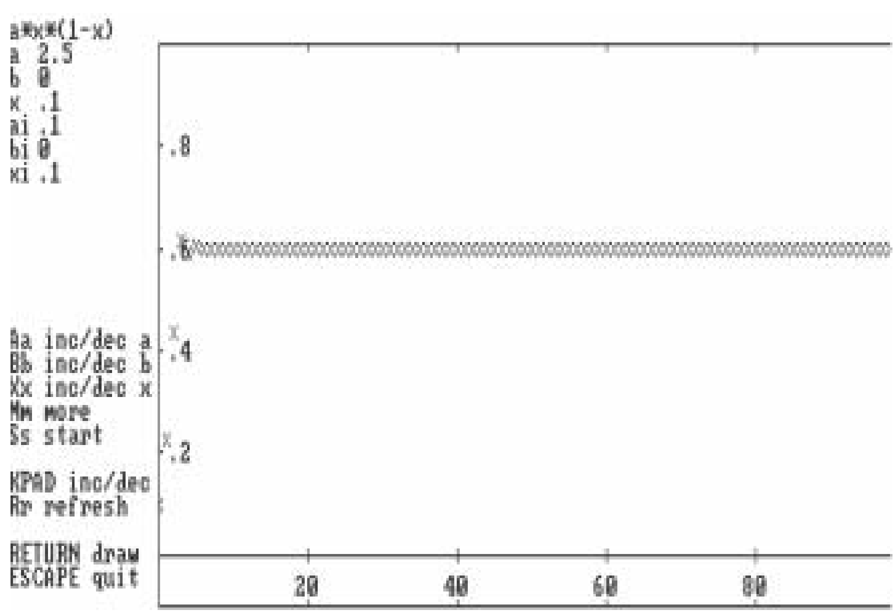


Pero, ¿Qué ocurre cuando la tasa de natalidad es superior a 1, digamos de 1.5?



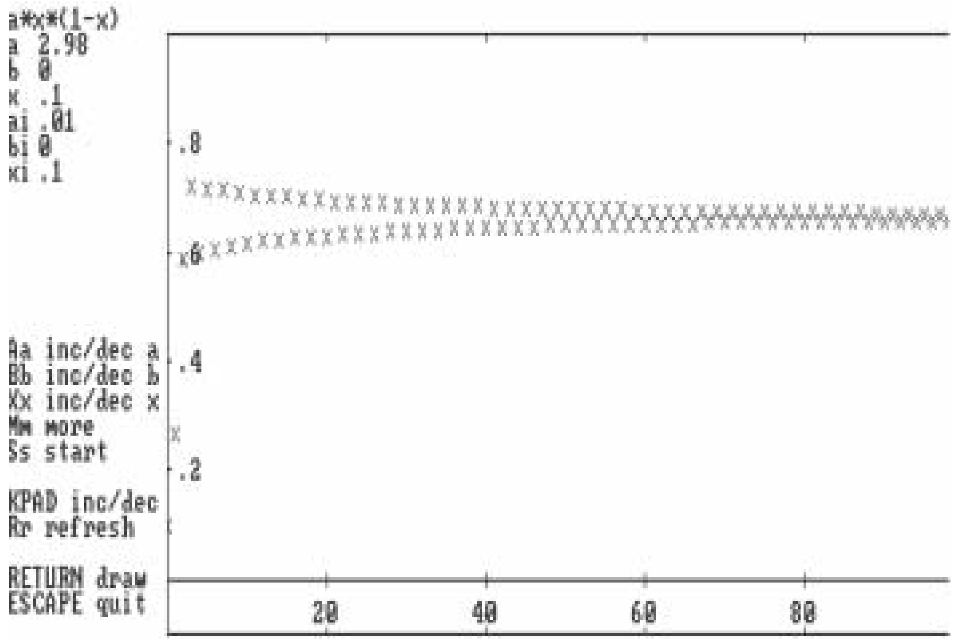


Cuando *N* (tasa de natalidad) es igual a 2.5, la población muestra una ligera oscilación cuando los dos terminos demográficos rivales entran en oposición, pero, después de eso, se regresa a la misma cifra constante de población.



Parece que la cifra *66%* de la población total se ha convertido en un atractor.

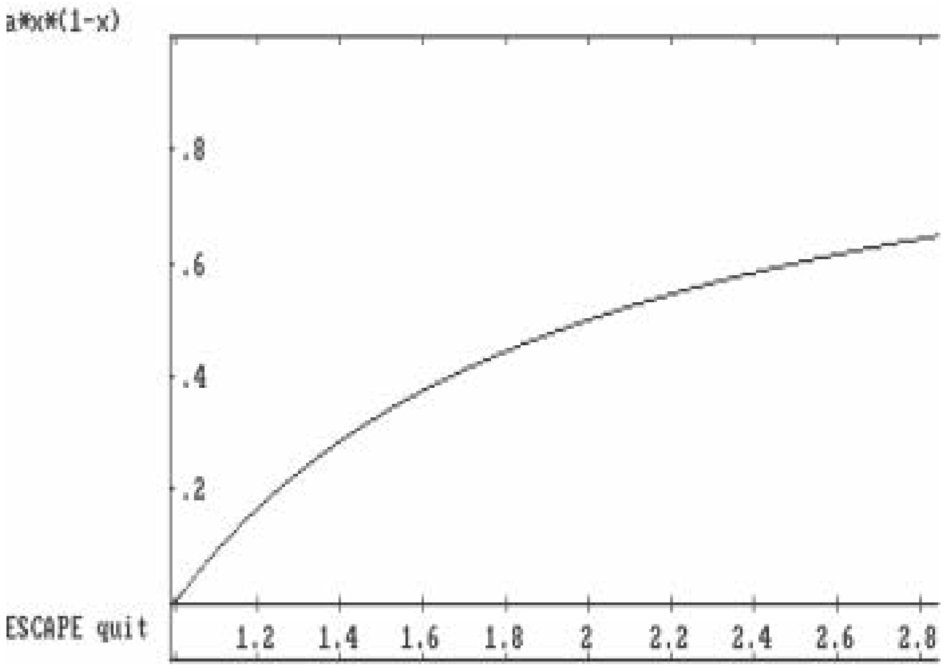
Subamos *N* a 2.98. ¿Qué ocurre ahora?



La oscilación continúa por más tiempo pero eventualmente la población se acomoda en un *66%* de la población total posible, esto es: *de vuelta al atractor*.

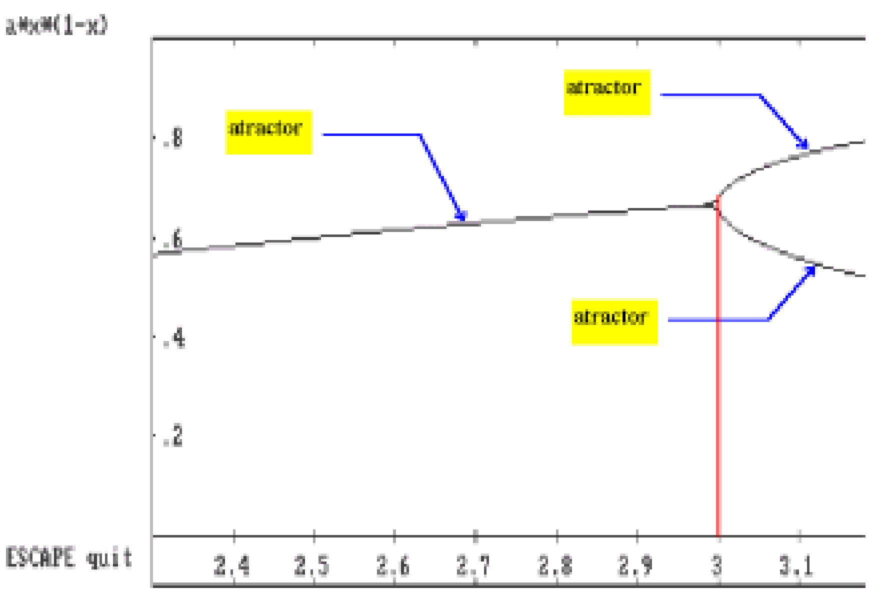
Si elevamos aún más el valor de *N* , la tasa de natalidad, las oscilaciones duran por más tiempo pero eventualmente la población se acomoda en un *66%* .

En tanto hemos hecho variar la tasa de crecimiento *N* desde .99 hasta 2.98 hemos observado que el comportamiento dinámico del proceso de Verhulst logra estabilizarse después de cierto número de iteraciones recursivas, a manera de resumen:



Nota: Esta gráfica es cualitativamente diferente, pues a diferencia de las anteriores: *% población vs Nº de ciclos recursivos* ésta, y las siguientes, del tipo *% población vs tasa de crecimiento*

Sorprendentemente, cuando la tasa de natalidad alcanza un valor crítico de 3.0, ...

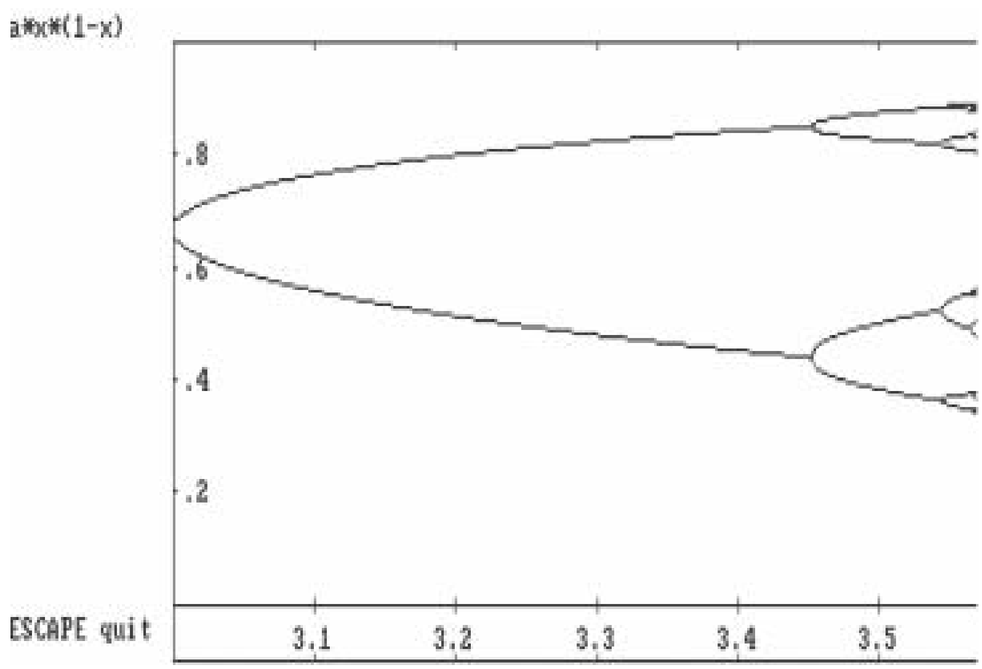


algo nuevo ocurre. El atractor antes estable en 66% de la población original se vuelve inestable y se divide en dos. Ahora la población comienza a oscilar alrededor de dos valores estables en vez de uno.

En términos reales, esto significa que la población de lagartas se reproduce fanáticamente, dejando una gran provisión de larvas para la próxima temporada. Pero en la siguiente temporada la región está excesivamente poblada, lo cual crea un efecto de reducción, de modo que los insectos que sobreviven dejan pocas larvas para el próximo año. La población oscila entonces entre valores altos y bajos.

La conducta del sistema se ha complejizado.

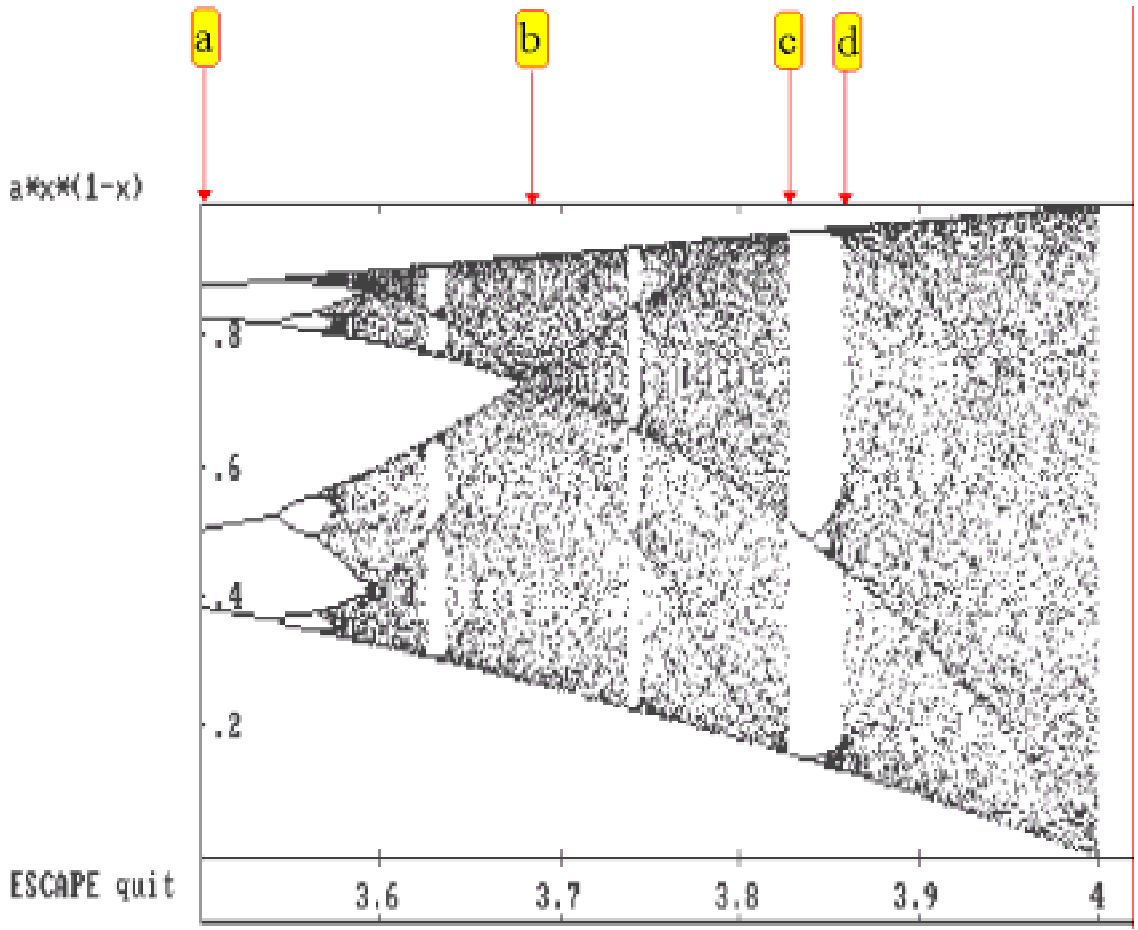
Cuando elevamos la tasa de natalidad por encima de 3.4495, los dos puntos fijos se vuelven inestables y a su vez se bifurcan para producir una población que oscila ahora alrededor de cuatro valores.



Cuando la tasa de natalidad llega a 3.596 las oscilaciones se vuelven otra vez inestables. En 3.596 tenemos otra bifurcación, esta vez con dieciséis atractores.

En este punto es casi imposible ver algún orden en el ascenso y descenso de la población de larvas en nuestro jardin. Año con año el número "brinca" de modo casi aleatorio y no podemos discernir el patrón.

Finalmente cuando la tasa de natalidad llega a 3.5699, el número de atractores ha aumentado hasta el infinito.



Algunos órdenes visibles dentro de esa extraña ruta hacia el caos.

1. En la imagen se advierten regiones más obscuras (más llenas de puntos). En la gama de tasas de natalidad que va desde 3.56999 a 3.7 (entre a y b en la parte superior del gráfico) el sistema (cantidad anual de larvas) fluctúa imprevistamente dentro de cuatro amplias regiones de atracción y luego de dos.
2. Estas regiones se aproximan hasta encontrarse donde apunta la flecha b. Aquí, en el orden del 3.7 la población podría tener casi cualquier valor, desde muy cerca de cero hasta una cifra muy alta y de año en año la población "brinca" de manera loca e imprevisible. Sin embargo, la totalidad del *espacio de fases* del sistema solo se llena cuando la tasa de natalidad llega a 4.0.
3. Reparemos que las líneas oscuras forman parábolas dentro del abanico del Caos. Estas líneas representan de hecho los valores que tienen una

probabilidad mas alta de que el sistema se encuentre en un momento determinado. Esta es desde luego otra forma de orden dentro del Caos.

4. Las bandas blancas visibles y esparcidas a través de la expansiva sombra del Caos, se trata de regiones -los físicos llaman "ventanas"- donde el sistema se vuelve estable. Por ejemplo en el intervalo señalado por las flechas entre c y d, justo en el medio de este Caos en expansión, la población se vuelve nuevamente previsible.
5. El orden determinista

$$X_{n+1} = NX_n(1 - X_n), \text{ donde } 0 \leq X_n \leq 1$$

puede conducir al Caos.

6. Así como un proceso aleatorio o aparentemente caótico, puede conducir al orden.
7. Universalidad. En el verano de 1975, mientras estudiaba diversas ecuaciones de período doble, el físico Mitchel Feigenbaum del Laboratorio Nacional Los Alamos, descubrió al poner a prueba una cierta clase de ecuaciones usando una calculadora de bolsillo, una escala universal en sus transformaciones de duplicación de períodos. Las ecuaciones que exploraba Feigenbaum se aplican a fenómenos tan diversos como los circuitos eléctricos, los sistemas ópticos, los aparatos de estado sólido, los ciclos de negocios, las poblaciones y el aprendizaje. Feigenbaum demostró que los detalles demasiado particulares de estos diversos sistemas no importan, y que la duplicación de períodos es un factor común en el modo en que el orden se desintegra en el Caos. Pudo calcular unos pocos números universales que representaban proporciones en la escala de puntos de transición durante el proceso de duplicación del período. Descubrió que cuando un sistema funciona sobre sí mismo (recursivamente) una y otra vez presenta cambios exactamente en esos puntos universales a lo largo de la escala. Las proporciones descubiertas por él hoy se denominan números de Feigenbaum.