Álgebra: un pequeño ensayo sintético

Por: Víctor M. Hernández L.

Álgebra (del Árabe "*al-djebr*" que significa *"reunión"*, *"conexión"* o *"compleción"*, parte del título de un libro escrito en Árabe en 830 AC por un matemático nombrado al"Khwarismi) es una rama de las matemáticas que puede ser definida como una generalización y extensión de la aritmética. El campo de estudio puede ser dividido en:

- álgebra elemental, donde son registradas las propiedades de los números reales, y son usados símbolos como "sustitutos" que denotan constantes y variables, en ella son estudiadas las reglas que gobiernan a las expresiones matemáticas y a las ecuaciones que involucran estos símbolos.
- álgebra abstracta, donde son axiomáticamente definidas e investigadas las llamadas estructuras algebraicas tales como campos, grupos, y anillos. Las propiedades específicas de los espacios vectoriales son estudiados en el álgebra lineal.
- álgebra universal, donde son estudiadas las propiedades comunes a todas las estructuras algebraicas.
- álgebra computacional, en esta se colectan los algoritmos para las diferentes manipulaciones simbólicas de los objetos matemáticos.

La palabra *álgebra* también es usada para referirse a diversas estructuras algebraicas como:

- álgebra sobre un campo
- álgebra Booleana
- Sigma-álgebra

En el álgebra abstracta, una **estructura algebraica** consiste de un conjunto y una o más operaciones definida(s) sobre el conjunto que satisfacen ciertos axiomas. En caso de que no haya ambigüedades, identificamos usualmente al conjunto como una estructura algebraica. Por ejemplo, un grupo $(G, *)$ con frecuencia es referido simplemente como un grupo G.
Las estructuras algebraicas son nombradas dependiendo de las operaciones y axiomas definidas en ellas. A continuación se presenta una lista parcial de estructuras algebraicas:

- Magma o groupoide: un conjunto con una operación binaria simple
- Cuasigrupo: un magma en el cual siempre es posible la división
- Bucle: un cuasigrupo con un elemento identidad
- Semigrupo: una magma asociativo
- Monoide: un semigrupo con un elemento identidad
- Grupo: un monoide en el cual cada elemento tiene inverso, o equivalentemente, un bucle asociativo
- Grupo Abeliano: un grupo conmutativo
- Anillo: un conjunto con un una operación de grupo abeliano como la adición, junto con una operación monoide como la multiplicación que satisfacen la distributividad
- Campo: un anillo en el cual los elementos no-nulos forman un grupo abeliano bajo la multiplicación

- Módulo sobre un anillo dado *R*: es un conjunto con una operación de grupo abeliano como la adición, junto con una operación unaria aditiva de una multiplicación escalar para cada elemento de *R*, con una condición de asociatividad ligando a la multiplicación escalar a la multiplicación en *R*
- Espacio vectorial: un módulo sobre un campo
- Álgebra: un módulo o espacio vectorial junto con una operación bilineal como la multiplicación
- Álgebra asociativa: un álgebra cuya multiplicación es asociativa
- Álgebra conmutativa: un álgebra asociativa cuya multiplicación es conmutativa
- Álgebra de Kleene: dos operaciones binarias y una unaria, modelada sobre expresiones regulares
- Entramado (Lattice): un conjunto con dos operaciones conmutativas, asociativas e idempotentes que satisfacen la ley de absorción
- Álgebra Booleana: un entramado (lattice) acotado, distributivo y complementado
- Conjunto: aunque para algunos matemáticos no se cuentan entre las estructuras algebraicas, un conjunto puede en sí mismo ser considerado como una estructura algebraica degenerada, una que tiene cero operaciones definidas en él

Aquellas cuestiones que permanecen invariantes colectivamente a todas las estructuras algebraicas son investigadas en la rama de las matemáticas conocida como álgebra universal.

Las estructuras algebraicas también pueden ser definidas sobre conjuntos con estructuras no-algebraicas, tales como espacios topológicos. Por ejemplo, un grupo topológico es un espacio topológico con una estructura de grupo tal que las operaciones de multiplicación y su inversa son continuas: un grupo topológico tiene una estructura tanto topológica como algebraica.

Otros ejemplos comunes son los espacios vectoriales topológicos y los grupos de Lie. Cada estructura algebraica tiene su propia noción de homomorfismo, una función es compatible con la(s) operación(es) dada(s). En este caso, cada estructura algebraica define una categoría. Por ejemplo, la categoría de grupos tiene a todos los grupos como objetos y a todos los grupos de homomorfismos y a todos los grupos de morfismos como morfismos. Esta categoría, a pesar de ser una categoría concreta, puede ser referida como una categoría de conjuntos con una estructura extra en el sentido teorético de las categorías. Similarmente, la categoría de los grupos topológicos (con grupos continuos de homomorfismos como morfismos) es una categoría de espacios topológicos con una estructura extra.