

<p>Aspects of Radical Constructivism and its Educational Recommendations</p> <p>[Presented at ICMe-7, Working Group #4, Quebec, August 1992]</p>	<p>Aspectos del Constructivismo Radical y sus Recomendaciones Educativas</p> <p>[Presentado en el ICME-7, Grupo de Trabajo #4, Québec, Agosto de 1992]</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>In the context of theories of knowledge, the name "radical constructivism" refers to an orientation that breaks with the Western epistemological tradition. It is an unconventional way of looking and therefore requires conceptual change. In particular, radical constructivism requires the change of several deeply rooted notions, such as knowledge, truth, representation, and reality. Because the dismantling of traditional ideas is never popular, proponents of radical constructivism are sometimes considered to be dangerous heretics. Some of the critics persist in disregarding conceptual differences that have been explicitly stated and point to contradictions that arise from their attempt to assimilate the constructivist view to traditional epistemological assumptions. This is analogous to interpreting a quantum-theoretical physics text with the concepts of a 19th-century corpuscular theory.</p>	<p>En el contexto de las teorías del conocimiento, el nombre de "constructivismo radical" se refiere a una orientación que rompe con la tradición epistemológica occidental. Es una manera no convencional de ver y por lo tanto requiere de cambios conceptuales. En particular, el constructivismo radical requiere el cambio de algunas nociones profundamente enraizadas, tales como conocimiento, verdad, representación, y realidad. Dado que dismantlar ideas tradicionales nunca es popular, los proponentes del constructivismo radical son algunas veces considerados heréticos peligrosos. Algunos de los críticos persisten en hacer caso omiso de diferencias conceptuales que han sido explícitamente establecidas y señaladas como contradicciones que surgen de sus intentos por asimilar la visión constructivista con asunciones epistemológicamente tradicionales. Esto es análogo a interpretar un texto teórico de física cuántica con los conceptos de una teoría corpuscular del siglo XIX.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>It may be useful, therefore, to reiterate some points of our "post-epistemological" approach¹, so that our discussion might have a better chance to start without misinterpretations.</p>	<p>Por lo tanto, puede ser útil reiterar algunos puntos de nuestra aproximación "post-epistemológica", así nuestra discusión tendría mayor oportunidad de empezar sin falsas interpretaciones</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>No Exit from Subjectivity</p> <p>Radical constructivism is an attempt to develop a theory of knowing that is not made illusory from the outset by the traditional assumption that the cognizing activity should lead to a 'true' representation of a world that exists in itself and by itself independently of the cognizing agent. Instead, radical constructivism assumes that the cognizing activity is instrumental and neither does nor can concern anything but the experiential world of the knower. This experiential world is constituted and structured by the knower's own ways and means of perceiving and conceiving, and in this elementary sense it is always and irrevocably subjective. It is the knower who segments the manifold of experience into raw elementary particles, combines these to</p>	<p>Sin Salida desde la Subjetividad</p> <p>El constructivismo radical es un intento de desarrollar una teoría de conocimiento que no está hecha ilusoriamente desde el exterior por la tradicional asunción de que la actividad de conocer nos debe conducir hacia una representación "verdadera" de un mundo que existe en él mismo y por él mismo independientemente del agente cognoscente. En su lugar, el constructivismo radical asume que la actividad cognoscente es instrumental y ni hace ni tiene que ver sino con el mundo experiencial de quien conoce. Este mundo experiencial es constituido y estructurado por los propios medios de los cognoscentes y a través de percibir y de concebir, y en este sentido elemental es siempre e irrevocablemente subjetivo. Es el cognoscente quien</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>form viable 'things', abstracts concepts from them, relates them by means of conceptual relations, and thus constructs a relatively stable experiential reality. The viability of these concepts and constructs has a hierarchy of levels that begins with simple repeatability in the sensory-motor domain and turns, on levels of higher abstraction, into operational coherence, and ultimately concerns the non-contradictoriness of the entire repertoire of conceptual structures.</p>	<p>divide en segmentos la multiplicidad de las experiencia en crudas partículas elementales, las combina para formar las 'cosas' viables, abstrae conceptos de ellas, las relaciona por medio de relaciones conceptuales, y así construye una realidad experiencial relativamente estable. La viabilidad de estos conceptos y constructos tiene una jerarquía de niveles que da inicio con la simple repetición en el dominio sensorio-motor y se torna, sobre niveles más elevados de abstracción, en coherencia operacional, y finalmente se refiere a la no contradictoriedad de todo el repertorio de estructuras conceptuales</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>The statement that the construction of the experiential world is irrevocably subjective, has been interpreted as a declaration of solipsism and as the denial of any 'real' world. This is unwarranted. Constructivism has never denied an ulterior reality; it merely says that this reality is unknowable and that it makes no sense to speak of a representation of something that is inherently inaccessible.</p>	<p>La aseveración de que la construcción del mundo experiencial es irrevocablemente subjetiva, ha sido interpretada como una declaración de solipsismo y como la negación de cualquier mundo 'real'. Esto es injustificable. El constructivismo nunca ha negado una realidad ulterior; simplemente dice que esta realidad es inconocible y que no tiene sentido hablar de una representación de algo que es inherentemente inaccesible.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>The insistence on the subjectivity of the experiential world has also led some critics to the rash conclusion that radical constructivism ignores the role of social interaction in the construction of knowledge. This, too, is a misinterpretation, and a rather thoughtless one. If one begins with the assumption that all knowledge is derived from perceptual and conceptual experience, one in no way denies that 'others' and 'society' have an influence on the individual's cognitive constructing; but one will remain aware of the fact that these others and the society they constitute 'exist' for the individual' subject only to the extent to which they figure in that individual's experience -- that is to say, they are for each subject what he or she perceives and conceives them to be.</p>	<p>La insistencia en la subjetividad del mundo experiencial también a conducido a algunos críticos a la precipitada conclusión de que el constructivismo radical ignora el rol de la interacción social en la construcción del conocimiento. Esto también, es una falsa interpretación, y más bien irreflexiva. Si uno empieza con la asunción de que todo conocimiento se deriva desde la experiencia perceptual y conceptual, uno en ningún sentido niega que los 'otros' y la 'sociedad' han influido sobre la construcción cognitiva individual; pero uno se mantiene conciente del hecho de que estos otros y la sociedad que constituyen 'existen' para el 'sujeto individual' sólo en el grado en el que figuran en su experiencia individual – Por así decir, están ahí para cada sujeto que los percibe o los concibe.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>In contrast, those who call themselves social constructionists, tend to introduce the social context as an ontological given. They are, of course, free to do so; but it does not entitle them to fault another school of thought that endeavors to build a theory of knowing without ontological givens or other metaphysical assumptions. This was seen quite clearly sixty years ago by Alfred Schütz (1932) when he referred to "the immensely difficult problems that are tied to the constitution of the <i>thou</i> in each individual's own subjectivity" and added a few lines later that "...such analyses belong to the general</p>	<p>En contraste, aquellos que se llaman a sí mismos construccionistas sociales, tienden a introducir el contexto social como ontológicamente dado. Por supuesto que ellos son libres de hacerlo, pero eso no les da derecho de culpar a otra escuela de pensamiento que se esfuerza por construir una teoría del conocimiento sin ontologías dadas u otras asunciones metafísicas. Esto fue visto con absoluta claridad hace sesenta años por Alfred Schütz (1932) cuando se refirió a " los problemas inmensamente difíciles que se atan a la constitución del <i>tú</i> en la subjetividad propia de cada individuo" y agregó unas</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

theory of knowledge and thus mediately to the social sciences" (p. 138). Radical constructivism is indeed intended as a theory of knowing and therefore is obliged to attempt an analysis of how the thinking subject comes to have others in his or her construction of the experiential world (cf. von Glasersfeld, 1986).	cuantas líneas después que "...tales análisis pertenecen inicialmente a la teoría general del conocimiento y después, a las ciencias sociales" (p.138). El constructivismo radical de hecho está propuesto como una teoría del conocimiento y por lo tanto está obligado a intentar un análisis de cómo el tema del pensamiento llega a incluir a los otros en la construcción de su mundo experiencial (cf. Von Glasersfeld, 1986).
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Some Salient Characteristics From the radical constructivist point of view, the basic ideas concerning the questions <i>what is knowledge and how do we come to have it</i> , can be summarized as follows.	Algunas Características Sobresalientes Desde el punto de vista del constructivismo radical, las ideas básicas referentes a las interrogantes <i>¿qué es el conocimiento y cómo lo obtenemos?</i> , se puede resumir de la siguiente manera.
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

No philosopher in the course of the last 2500 years has been able to demolish the sceptics' logical arguments that the real world, in the sense of ontological reality, is inaccessible to human reason. In view of this impasse,, constructivism, like the pragmatists at the beginning of our century, suggests that we change the concept of knowledge. The pragmatists, however, remained attached to a metaphysical if not material form of realism. Instead, constructivism goes back to Vico, who considered human knowledge a human construction that was to be evaluated according to its coherence and its fit with the world of human experience, and not as a representation of God's world as it might be beyond the interface of human experience. Constructivism drops the requirement that knowledge by 'true' in the sense that it should match an objective reality. All it requires of knowledge is that it be viable, in that it fit into the world of the knower's experience, the only 'reality' accessible to human reason.	Ningún filósofo en el transcurso de los últimos 2500 años ha sido capaz de demoler los argumentos lógicos escépticos de que el mundo real, en el sentido de realidad ontológica, es inaccesible a la razón humana. En vista de este callejón sin salida, el constructivismo, como los pragmáticos en el principio de nuestro siglo, sugieren que cambiemos el concepto de conocimiento. Los pragmáticos, sin embargo, se mantienen vinculados a una forma metafísica, si no es que material, del realismo. En su lugar, el constructivismo se regresa a Vico, quien consideró el conocimiento humano como una construcción del humano que tenía que ser evaluado de acuerdo a su coherencia y a su ajuste con el mundo de la experiencia humana, y no como una representación del mundo de Dios, como si pudiera estar más allá de la interfase de la experiencia humana. El constructivismo abandona la necesidad de que el conocimiento es "verdadero" en el sentido de que se corresponde a una realidad objetiva. Todo lo que se requiere del conocimiento, es que sea viable, en el sentido que se acomode al mundo de la experiencia del que conoce, la única 'realidad' accesible a la razón humana.
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

With regard to the cognitive construction, we follow the two pioneers of conceptual analysis, Jean Piaget and Silvio Ceccato. That is to say, we attempt to build plausible models of how, by means of reflection and abstraction, viable concepts could be derived from subjective experience.	Con referencia a la construcción cognitiva, seguimos a los dos pioneros del análisis conceptual, Jean Piaget y Silvio Ceccato. Esto quiere decir que intentamos construir modelos plausibles de cómo, por medio de la reflexión y la abstracción, pueden ser derivados conceptos viables desde la experiencia subjetiva.
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

This change of view has consequences not just for a few traditional philosophical beliefs but for almost everything one habitually thinks about acts of knowing and knowledge resulting from them. Here I	Este cambio de visión tiene consecuencias no sólo para unas pocas de creencias filosóficas tradicionales, sino para casi cualquiera que habitualmente piensa acerca de los actos de conocimiento y el
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

want to mention only two cases in point.	conocimiento resultante de ellos. Aquí quiero mencionar solamente dos casos precisos.
------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------

Inherent in radical constructivism is the realization that no knowledge can claim uniqueness. In other words, no matter how viable and satisfactory the solution to a problem might seem, it can never be regarded as the only possible solution. (Note that this does not contradict the observation that, for instance in mathematics, solutions are often fully determined by the operations one carries out to find them.)	Inherente al constructivismo radical está el darse cuenta de que ningún conocimiento puede declararse como el único. En otras palabras, no importa que tan viable o satisfactoria pueda parecer la solución a un problema, nunca puede ser visto como la única solución posible. (note que esto no contradice la observación que, por ejemplo en matemáticas, las soluciones frecuentemente son completamente determinadas por las operaciones que uno ejecuta para encontrarlas).
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

The second is Leo Apostel's admonition that "a systems should always be applied to itself" (Inhelder et al., 1977, p. 61). In our case, this leads to the conclusion that radical constructivism cannot claim to be anything but <i>one</i> approach to the age-old problem of knowing. Only its application in contexts where a theory of knowing makes a difference can show whether or not it can be considered a viable approach.	La segunda es la admonición de Leo Apostel que "un sistema debiera siempre aplicarse a sí mismo" (Inhelder et al., 1977,p.61). En nuestro caso, esto conduce a la conclusión de que el constructivismo radical no puede demandar ser algo , sino tan sólo <i>un</i> acercamiento al histórico problema de conocer. Solamente su aplicación en contextos donde una teoría del conocimiento hace una diferencia, puede mostrar si puede o no, ser considerado como un acercamiento viable.
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Concerning Education</p> <p>Indeed, here at ICME-7, we are not primarily concerned with philosophical questions, but rather with applications to the teaching of mathematics. In this regard, let me emphasize that, though we have promising beginnings (cf. Steffe et al., 1983,1988; Steffe, 1991; von Glasersfeld, 1981 & in press), the enormous task of analyzing the basic conceptual steps in the construction of mathematics has barely begun.</p>	<p>Respecto a la Educación</p> <p>De hecho, aquí en el ICME-7, no estamos inicialmente preocupados con cuestiones filosóficas, sino más bien con aplicaciones a la enseñanza de las matemáticas. En este aspecto, permítanme enfatizar que, aunque tenemos principios prometedores (cf. Steffe et al., 1983,1988; Steffe,1991; von Glasersfeld,1981& en prensa), la enorme tarea de analizar los pasos conceptuales básicos en la construcción de las matemáticas apenas ha comenzado.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Teachers at all levels, from elementary school to post-graduate instruction, have to rely on the use of language, and textbooks can not do without it. Yet, in my experience, few language users have given much thought to the question how linguistic communication is supposed to work.	Los profesores en todos los niveles, desde la escuela elemental hasta la instrucción de post-grado, tienen que apoyarse en el uso del lenguaje, y los libros de texto no se hacen sin él. Todavía, en mi experiencia, pocos usuarios de la lengua le han dedicado suficiente reflexión a la interrogante de cómo se supone que debiera funcionar la comunicación lingüística .
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

In everyday circumstances, where most of what we say and others say to us, does not give rise to obvious misinterpretation, we usually assume that the meaning of words and sentences is the same for all speakers of the particular language. If there are differences, they seem to be insignificant. I have shown elsewhere that, even in the case of the most	En circunstancias cotidianas, donde lo que decimos y otros nos dicen, no da lugar a que surjan malas interpretaciones, usualmente asumimos que el significado de las palabras y las oraciones es el mismo para todos los hablantes de una lengua en particular. Si hay diferencias, parecen ser insignificantes. He mostrado en alguna otra parte
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>ordinary objects, the notion of 'shared meaning' is strictly speaking an illusion. This is so because we associate the sounds we come to isolate as 'words' not with things but with our subjective experiences of things -- and though subjective experiences may be similar for different subjects, they are never quite the same (von Glasersfeld, 1990).</p>	<p>que, aún en el caso de los objetos más ordinarios , la noción de 'significado compartido' es, estrictamente hablando, una ilusión. Esto es así porque asociamos los sonidos que aislamos como palabras, no con las cosas, sino con nuestras experiencias subjetivas de las cosas - y aunque las experiencias subjetivas pueden ser similares para diversos temas, nunca son absolutamente iguales (von Glasersfeld,1990).</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>The Making of Abstractions</p> <p>Here, however, we are concerned with mathematics teaching and thus not with sensory items but with concepts that are abstracted from mental operations. In the case of ordinary sensory objects, the individual gradually learns by interacting in practical situations with other speakers of the language, to adjust his or her meanings so that they become more or less compatible with those current in the community. In the case of abstract items, however, it is far more difficult to achieve this social adequation, because the occasions where conceptual discrepancies might come to the surface are few and far between. Hence, in order to teach abstract notions, it is indispensable for the instructor to generate experiential situations for the students to make the necessary abstractions. In order to foster such abstractions, the teacher must be successful in establishing with the students a common language, i.e., a language of carefully negotiated and coordinated meanings or, as Maturana has called it, a consensual domain (Maturana, 1980; Richards, 1991).</p>	<p>El Hacer Abstracciones</p> <p>Aquí, sin embargo, nos referimos a la enseñanza de las matemáticas y por lo tanto no a items sensoriales, sino a conceptos que son abstraídos desde operaciones mentales. En el caso de objetos sensoriales, el individuo gradualmente aprende mediante la interacción en situaciones prácticas con otros hablantes de la lengua, para ajustar sus significados de tal modo que se vuelvan más o menos compatibles con aquellos que concurren en la comunidad. Si embargo, en el caso de items abstractos, es mucho mayor la dificultad para lograr esta adecuación social porque las ocasiones donde las discrepancias conceptuales pudieran salir a flote son pocas y lejanas entre ellas. De aquí que, con el fin de enseñar nociones abstractas, es indispensable para el instructor generar situaciones experienciales para que los estudiantes hagan las abstracciones necesarias. Con el fin de impulsar tales abstracciones, el profesor debe ser exitoso al establecer con los estudiantes un lenguaje común, i.e., un lenguaje de significados negociados y coordinados cuidadosamente o, como Maturana los ha llamado, un dominio consensual (Maturana,1980; Richards, 1991) .</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Mathematics is the result of abstraction from operations on a level on which the sensory or motor material that provided the occasion for operating is disregarded. In arithmetic this begins with the abstraction of the concept of number from acts of counting. Such abstractions cannot be given to students, they have to be made by the students themselves. The teacher, of course, can help by generating situations that allow or even suggest the abstraction. This is where manipulables can play an important role, but it would be naive to believe that the move from handling or perceiving objects to a mathematical abstraction is automatic. The sensory objects, no matter how ingenious they might be, merely offer an opportunity for actions from which the desired operative concepts may be abstracted; and one should never forget that the desired abstractions, no matter how trivial and obvious they</p>	<p>Las matemáticas son el resultado de la abstracción de operaciones en un nivel en el cual el material sensorial o motor que proporcionó la ocasión para operar es descartado. En aritmética esto principia con la abstracción del concepto de número de los actos de conteo. Tales abstracciones no pueden ser dadas a los estudiantes, tienen que ser hechas por los propios estudiantes. El profesor, por supuesto, puede ayudar generando situaciones que den lugar o incluso sugieran la abstracción. Es aquí donde los manipulables pueden jugar un rol importante, pero se puede ser ingenuo al creer que es automático el moverse desde la manipulación o la percepción de objetos hasta la abstracción matemática. Los objetos sensoriales, no importa qué tan ingeniosos puedan ser, nada más ofrecen una oportunidad para las acciones desde las cuales los conceptos operativos deseados pueden ser abstraídos; y uno no debiera</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

might seem to the teacher, are never obvious to the novice.	nunca olvidar que las abstracciones deseadas, sin importar qué tan triviales y obvias pudieran parecerle al profesor, nunca son obvias para el novato.
-------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

The same can be said about the use of multiple representations (Kaput, 1991; Gerace, in press). In learning to switch from one representation to another, an act of reflective abstraction may focus on what it is that appears to remain the same. But this abstraction is, again, not automatic, and it may well be precluded if the switch is explicitly presented as the simple exchange of two equivalent items. The point is that the representations are different, but an operative concept or conceptual relation they embody is considered the same.	Lo mismo se puede decir del uso de múltiples representaciones (Kaput, 1991; Gerace, in press). En aprender a cambiar de una representación a otra, un acto de abstracción reflexiva puede enfocarse en lo que parece permanecer igual. Pero esta abstracción no es, otra vez, automática, y muy bien pudiera ser que se imposibilite si el cambio de una representación a otra se presenta explícitamente como un simple intercambio de dos items equivalentes. El punto es que las representaciones son diferentes, pero el concepto operativo o relación conceptual que las encarna es considerado el mismo.
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Meaning and Misconceptions</p> <p>In contrast, the need for an experiential basis for the abstraction of concepts is often overlooked, because of the formalist myth that all that matters in mathematics is the manipulation of symbols. This ignores the fact that spoken words or marks on paper are symbols only if one attributes to them something they symbolize, i.e., a meaning -- and meaning is always conceptual. As Hersh said: "Symbols are used as aids to thinking just as musical scores are used as aids to music. The music comes first, the score comes later" (1986, p. 19). There is little point in teaching a score to students who have no music to relate to it. In school, however, mathematical symbols are often treated as though they were self-sufficient and no concepts and mental operations had to accompany them; but when students are only trained to manipulate marks on paper it is small wonder that few of them ever come to understand the meaning of what they are doing and why they should do it.</p>	<p>Significado e Ideas Falsas</p> <p>En contraste, la necesidad de una base experiencial para la abstracción de conceptos a menudo se pasa por alto, debido al mito formalista de que todo lo que importa en matemáticas es la manipulación de símbolos. Esto ignora el hecho de que las palabras habladas o las marcas sobre el papel son símbolos solamente si uno les atribuye algo que ellos simbolizan, i. e., un significado -- y el significado es siempre conceptual. Como Hersh dijo: "Los Símbolos son usados como auxiliares para pensar del mismo modo que las notas musicales son usadas como auxiliares para la música. La música viene primero, las notas vienen después" (1986, p.19). Hay poco que apuntar en la enseñanza de notas a estudiantes que no tienen alguna música para relacionarla. En la escuela, sin embargo, los símbolos matemáticos son tratados frecuentemente como si ellos fueran autosuficientes y no tuvieran que ser acompañados por algunos conceptos u operaciones mentales; pero cuando los estudiantes son entrenados solamente para manipular marcas sobre el papel surge el asombro de que unos pocos de ellos acaban por entender el significado de lo que están haciendo y por qué deben hacerlo.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Because there is no way of transferring meaning, i.e., concepts and conceptual structures, from one head to another, teachers, who have the goal of changing something in students' heads, must have some notion of what goes on in those other heads. Hence it would seem necessary for a teacher to build up a model of the student's conceptual world (see von Glasersfeld & Steffe, 1991).	Debido a que no hay forma de transferir significado, i.e., conceptos y estructuras conceptuales, de una cabeza a otra, los profesores, quienes tienen la meta de cambiar algo en las cabezas de los estudiantes, deben tener alguna noción de qué está pasando en esas cabezas. Por ello parecería necesario para los profesores formular un modelo del mundo conceptual de los estudiantes (ver von Glasersfeld&Steffe,1991)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

From the constructivist perspective, it is not helpful	Desde la perspectiva del constructivismo , no es útil
--------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------

<p>to assume (maybe on the basis of "wrong" answers) that a student's ideas are simply misconceptions that have to be replaced by the conceptions that are considered correct by mathematicians, physicists, or other experts. In order to become operative in a student's thinking, a new conception must be related to others that are already in the student's repertoire. No doubt there are several ways of establishing such relationships, but the simplest and most efficacious arises when the new structure is built out of elements with which the students are familiar. In other words, students must be shown that there are elements in their experience that can be related differently from the way they habitually relate them. To make such changes desirable to students, they must be shown that the new way provides advantages in a sphere of living and thinking that reaches far beyond passing exams and getting good grades.</p>	<p>asumir (puede ser sobre las bases de respuestas erróneas), que las ideas de un estudiante son simplemente falsas concepciones que deben ser sustituidas por aquellas que son consideradas correctas por los matemáticos, físicos u otros expertos. Para que una nueva concepción llegue a ser operativa en el pensamiento del estudiante, ésta se debe relacionar con otras que ya sean parte del repertorio del estudiante. Sin duda hay varias formas de establecer tales relaciones, pero la más simple y efectiva surge cuando la nueva estructura es construida a partir de elementos con los que los estudiantes están familiarizados. En otras palabras, se les debe mostrar a los estudiantes que hay elementos en su experiencia que pueden ser relacionados de forma diferente al modo en que ellos habitualmente los relacionan. Para hacer a los estudiantes deseables tales cambios, se les debe mostrar que la nueva manera provee ventajas en una esfera de vida y pensamiento que tiene alcances más allá de pasar exámenes y conseguir buenos grados.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Besides, when a student has struggled to find an answer to a given problem, it is not only boorish but also counterproductive to dismiss it as "wrong", even if the teacher then shows the "right" way of proceeding. Such disregard for an effort made inevitably demolishes the student's motivation. Instead, a wiser teacher will ask the student how he or she came to the particular answer. In the majority of cases, the student, in reviewing the path (i.e. reflecting upon the operations carried out), will either discover a hitch or give the teacher a clue to a conceptual connection that does not fit into the procedure that is to be learned. The first is an invaluable element of learning: it provides students with an opportunity to realize that they themselves can see what works and what does not. The second provides the teacher with an insight into the student's present way of operating and thus with a clearer idea of where a change might be attempted.</p>	<p>Además, cuando un estudiante ha luchado por encontrar una respuesta a un problema dado, no solamente es rudo sino también ineficaz descalificarlo como "equivocado", incluso si el profesor le muestra enseguida la manera "correcta" de proceder. Tal indiferencia ante un esfuerzo, inevitablemente provoca la demolición de la motivación del estudiante. En su lugar, un profesor más sabio preguntará al estudiante cómo él o ella llegaron a esa respuesta particular. En la mayoría de los casos, el estudiante, en la revisión de su proceso (i.e., reflexiona sobre las operaciones que llevó a cabo) bien descubrirá un tropiezo, o dará al profesor una pista para la conexión conceptual que no encaja en el procedimiento que está aprendiéndose. Lo primero es un elemento invaluable de aprendizaje: provee a los estudiantes la oportunidad de darse cuenta que pueden ver por ellos mismos lo que funciona y lo que no. El segundo provee al profesor de un asomo a la forma en que el estudiante está operando y así, le da una idea más clara de dónde se puede procurar un cambio.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>To end this brief list of recommendations, let me repeat a rather unpopular point. From the constructivist perspective, whatever one intends to teach must never be presented as the only possible knowledge -- even if the discipline happens to be mathematics. Indeed it should be carefully explained that a fact such as "$2 + 2 = 4$" may be considered</p>	<p>Para finalizar esta breve lista de recomendaciones, permítanme repetir un punto algo impopular. Desde la perspectiva constructivista, lo que sea que se intente enseñar, nunca deberá presentarse como el único conocimiento posible – aún si la disciplina resulta ser matemáticas. Más bien, debiera ser explicado cuidadosamente que un hecho tal como</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>certain, not because it was so ordained by God or any other extra-human authority, but because we come to construct units in a particular way and have agreed on how they are to be counted.</p>	<p>"2+2=4" puede ser considerado cierto no porque fue ordenado por Dios o cualquiera otra autoridad extra-humana, sino porque nosotros llegamos a construir unidades de un modo particular y hemos convenido sobre cómo deben ser contadas.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Footnotes

1. I owe this expression to Nel Noddings, who used it in a review of one of my papers.

References

- Gerace, William J. (in press) Contributions from cognitive research to mathematics and science education.
- Inhelder, B., Garcia, R., & Vonèche, J. (1977) *Epistemologie génétique et équilibration*. Neuchâtel: Delachaux et Nestlé.
- Hersh, R. (1986) Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T.Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (9-28). Boston/Basel: Birkhauser. (First published 1979).
- Kaput, J. J. (1991) Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (53-74). Dordrecht/Boston: Kluwer Academic.
- Maturana, H.R. (1980) Biology of cognition. In H.R. Maturana & F.J. Varela, *Autopoiesis and cognition*, 2-62. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht.
- Richards, J. (1992) Mathematical discussions. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (13-51). Dordrecht/Boston: Kluwer Scientific.
- Schütz, A. (1932) *Der sinnhafte Aufbau der sozialen Welt*. Frankfurt: Suhrkamp paperback, 1974.
- Steffe, L. P., (1991) *Epistemological foundations of mathematical experience*. New York: Springer.
- Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988) *Construction of arithmetical meaning and strategies*. New York: Springer.
- Steffe L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983) *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*. New York: Praeger.
- von Glasersfeld, E. (1981) An attentional model for the conceptual construction of units and number, *J. for Research in Mathematics Education*, 12 (2), 83-94.
- von Glasersfeld, E. (1986) Steps in the construction of "others" and "reality". In R. Trappl (Ed.), *Power, autonomy, utopias: New approaches toward complex systems* (107-116. London: Plenum Press.
- von Glasersfeld, E. (1990) Environment and communication. In L. P. Steffe & T. Woods (Eds.), *Transforming children's mathematical education* (30-38). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- von Glasersfeld, E. (in press) A constructivist approach to experiential foundations of mathematical concepts, *Science and Education*,...
- von Glasersfeld, E. & Steffe, L. P.. (1991) Conceptual models in educational research and practice, *J. of Education Thought*, 25 (2), 91-103.