Lectura de Apoyo 12

Unidad III: Geometría Analítica

Traducción de Vìctor M. Hernández L. y Martha C. Villalba G. para fines estrictamente académicos, tomado de ICMI Study: **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century.** Capítulo 5. pp 159-192. (Edit). Mammana, C. y Villani, V., Kluwer Academic Publishers. 1998.

5. La geometría en el salón de clase

Régine Douady & Bernard Parzysz

Presentación

Cuando un profesor y sus estudiantes están juntos en una clase, la expectativa institucional es que el profesor está ahí con el fin de enseñar algún conocimiento, y que los estudiantes están ahí con el fin de aprender este mismo conocimiento.

¿Pero, es en realidad el conocimiento relevante para todos los estudiantes que van a la escuela?

El rol del profesor, y con frecuencia también su deseo, es el comunicar algún conocimiento a los estudiantes - en nuestro caso matemáticas. ¿Pero es esto posible en realidad?

Nos gustaría que los estudiantes adquirieran una cultura matemática y también formas de pensar y razonar, conocimiento y habilidades que les permitan tratar con situaciones familiares tanto como con aquellas no esperadas. ¿Es posible organizar la relación entre profesores y estudiantes, a aún hacer que ésta evolucione de tal forma que la matemática se convierta en el objeto vigente de interacción, y hay alguna oportunidad de lograr tal propósito?

Este capítulo consiste de cuatro secciones.

La Sección 1 está dedicada al análisis esquemático de la clase de situaciones en las que ya sea que las matemáticas son relevantes tanto para el profesor como los estudiantes o sólo para el profesor, o sólo para los estudiantes, o para ninguno.

La Sección 2 describe una aproximación con un ejemplo, empezando de un problema geométrico que satisface algunos requerimientos, a saber:

- El contexto es familiar a todos. La cuestión tiene sentido para todos, cualquiera que sea su conocimiento.
- Cada quien está convencido de que el problema tiene una respuesta. Cada quien tiene una opinión y desea expresarla.
- Pero el tratamiento requiere algún conocimiento matemático. La intuición es engañosa. Entonces la curiosidad provoca desacuerdos de observación

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

con opiniones a-priori y el trabajo matemático se convierte en una forma de resolver el suspenso.

En las Secciones 3 y 4 describimos un proceso de ingeniería didáctica, i.e. una organización consistente de varias lecciones, sobre la cuestión desprendida de un problema geométrico dependiente de varios parámetros. El profesor debe fijar valores específicos para los parámetros o dejarlos a la libre elección de los estudiantes. La decisión depende del propósito del profesor y de la expectativa de los estudiantes.

La elección puede cambiar según el cuestionamiento de los estudiantes, las preguntas que hacen, los errores que cometen, sus convicciones, las dificultades que encuentran. En particular, la misma situación puede inducir trabajo matemático interesante y accesible a diferentes niveles escolares. Este el caso para los problemas que presentamos en esas secciones.

1. Las relaciones entre las matemáticas, los profesores y los estudiantes

1.1 Conocimiento matemático en las relaciones profesor - estudiantes

Es apropiado tomar en cuenta las relaciones entre aquello que el profesor intenta enseñar, lo que en realidad enseña y aquello que los estudiantes aprenden. Uno puede preguntarse cuál es la mejor forma de presentar un problema, un teorema ..., cómo predecir las dificultades encontradas por los estudiantes y cómo ayudarlos a superar esas dificultades. Pero las palabras "enseñar", "aprender", "conocer" pueden tener diferentes significados. Y esto tendrá influencia sobre la elección y las expectativas del profesor.

Sin embargo, todos estos aspectos descansan implícitamente en la suposición de que los estudiantes vienen a la escuela con el fin de aprender matemáticas, que el conocimiento es un objeto importante o incluso esencial en el interjuego entre los profesores y los estudiantes.

La realidad puede ser esa, o puede ser muy diferente. Aún cuando la realidad es siempre a medio tono, uno puede considerar cuatro casos extremos, de acuerdo a los cuales en una clase de matemáticas los profesores y estudiantes experimentan la misma relación mediante las matemáticas o no. Simbolizando con P al profesor y con E a los estudiantes proponemos la siguiente matriz:

Interés/curiosidad/pasión por las matemáticas	P: Sí	P: No
E: Sí	**Paraíso**	**Conflicto** deriva en una ficción didáctica
E: No	**Conflicto** pero ventajoso para P.	**Ficción didáctica**

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

En la misma clase, puede ocurrir que algunos estudiantes vengan a la escuela con el fin de adquirir conocimiento mientras que otros sólo tratan de pasar de clase en clase e ir tan lejos como se pueda con el fin de obtener un buen trabajo, y otros más tratan de socializar y aprender a ser útiles. A ellos no les importa si matemáticas o cualquier otra cosa se enseña ahí (Charlot & Bautier [5]). Por otro lado, el profesor convencerá e impondrá restricciones dependiendo de su historia personal, de sus conocimientos matemático y de sus concepciones sobre el aprendizaje; dependiendo de ello él tratará de promover sus convicciones o sólo tratará de sobrevivir. ¡A veces, incluso esto no es tan malo!

Así, como indica la matriz, los profesores y los estudiantes pueden ir en fase o en oposición respecto a las matemáticas. Los posibles estados son:

Situación paraíso. Ésta ocurre en una clase cuando profesores y estudiantes están apasionados por las matemáticas. La geometría como un dominio de modelización o como un lugar privilegiado para el razonamiento puede ser un campo conveniente para el interjuego. El trabajo del profesor es entonces elegir y organizar la puesta en escena, incluyendo lo oportuno en la presentación del conocimiento para desarrollar la curiosidad de una forma que resulte aceptable para los estudiantes y eficiente en vista de su reclamo por aprender.

Ficción didáctica. Ésta ocurre cuando el conocimiento matemático no es un asunto relevante ni para el profesor ni para los estudiantes. Con el fin de que el profesor haga su trabajo como profesor y de que los estudiantes hagan su trabajo como estudiantes, la clase experimenta un estado de ficción didáctica: el profesor podrá enseñar algo y los estudiantes aprenderán algo. Ellos serán evaluados según un contrato, implícito o explícito, interno a la clase.

¿Pero dónde están las matemáticas? ¿Qué pueden hacer los profesores?

Muy pronto el procedimiento usual será el siguiente: el profesor propone tareas a los estudiantes, que son descompuestas en subtareas elementales, algoritmizadas de acuerdo a las necesidades de los estudiantes hasta que un porcentaje aceptable de estudiantes dan respuesta de una manera aceptable.

La consecuencia de tal elección es que el significado de la actividad matemática se ha desvirtuado. Los aspectos `mágicos´ toman lugar sobre los racionales.

Con el fin de evitar esta situación, los estudiantes debieran tener formas de controlar su producción, en lugar de hacer el trabajo de nueva cuenta en los mismos términos. Por ejemplo, ellos pueden expresar el mismo problema de varias maneras y probar la consistencia de la información colectada. Ellos pueden también aceptar un resultado por un tiempo y derivar consecuencias con lo que es sabido en aquella materia ... El control tendría que ser económico en tiempo y eficiente en términos de veracidad. Tal trabajo favorecería la reorganización del conocimiento y daría estructura a la memoria. Pero tal trabajo técnico e intelectual de los estudiantes requiere que sean capaces de elegir, activar y relacionar piezas de conocimiento provenientes de dominios diferentes. Más aún esta forma de control científico bajo la responsabilidad de los estudiantes tendría que ser legitimada en la clase, i.e. reconocida y esperada por el profesor. Debiera ser parte de los hábitos de la clase y claramente distinguida de la tradicional evaluación que hace el profesor de sus estudiantes.

En el estado `paraíso´, las matemáticas son el corazón de las relaciones didácticas. Pero aquí (P no, E no) no es así: la tendencia será el privilegiar más y más la memoria, con poca oportunidad de organizarla. El profesor es guiado a dividir las tareas y algoritmizar más y más. Pero el curso puede proceder y continuar. Si los test de evaluación son elegidos adecuadamente -preguntas pequeñas en conformidad con las prácticas realizadas - un número suficiente de estudiantes tendrá suficientes buenas calificaciones para pasar. Así se asegura la supervivencia del profesor y de los estudiantes en un corto plazo.

¿Pero qué hay en el largo plazo para los estudiantes que aceptan tal juego?

¿Cuál será el destino para aquellos que lo rehúsan, o para aquellos que fallan a pesar de sus buenos deseos?

Conflicto. Este ocurre cuando el conocimiento matemático es un asunto relevante para el profesor pero no para los estudiantes. El asunto para el profesor se convierte entonces en obtener un cambio en la relación de sus estudiantes hacia las matemáticas. Este puede ser un gran reto para el profesor, quien se involucra en un proceso de cambio entre de las relaciones de los estudiantes con la escuela, las relaciones entre el profesor y los estudiantes y entre los estudiantes. Esto requiere que los estudiantes sean capaces de entrar a una actividad científica y estar convencidos de que vale la pena.

Es responsabilidad del profesor convencer a sus estudiantes de que las matemáticas están vivas como una ciencia, que la creación toma lugar cada día y que ellos por sí mismos pueden estar en la posición de participar en ello, ya sea directamente o mediante el trabajo en uno de los muchos dominios de la vida económica, tecnológica o social donde las matemáticas están involucradas de una manera con frecuencia escondida pero esencial.

Un cambio en las relaciones hacia las matemáticas requiere de los estudiantes que esta disciplina tome un significado más fuerte y que estén disponibles algunas herramientas bajo su control. Esto significa que el profesor pone a los estudiantes en posición de hacer elecciones, de probar sus consecuencias, de controlar, discutir y posiblemente de reconsiderar estas elecciones,... El profesor tiene que asegurar que los estudiantes tengan en realidad el conocimiento cultural y técnico necesario.

Esto también significa, respecto al contrato didáctico, que los estudiantes aceptan ser involucrados como actores, y no confinarse a sí mismos a la tarea de cumplir órdenes. Es en este contexto de aprendizaje que para el profesor es inevitable el "juego de devolución" (Brousseau [4]).

Finalmente, esto requiere que el profesor ponga a los estudiantes en posición de establecer relaciones fuertes entre la construcción del significado y una recomposición consistente e institucionalizada de las piezas concernientes al conocimiento.

¿Pero cuál es su espacio para maniobrar y sobre qué puede actuar, ya que está sujeto a las restricciones institucionales y a varias formas de presión?

En el clásico contrato escolar, el conocimiento y la autoridad están del lado del profesor. Su tarea es transferir una parte de su conocimiento, con relación a la autoridad personal inducida por su posición institucional. Si él quiere que los estudiantes trabajen bajo control científico y no sólo bajo el hilo de la evaluación de los profesores, tendrá que usar su autoridad para ayudar a los estudiantes -que rehúsan la escuela y las matemáticas- a hacer una transferencia de intereses y curiosidad hacia las matemáticas y consecuentemente hacia la escuela y el estudio (R. Douady, [12] para un ejemplo de dicha transferencia).

1.2 Hipótesis

Una primera hipótesis:

a) La adquisición por los estudiantes de las piezas matemáticas del conocimiento que están disponibles y son adaptables a varias situaciones bajo sus iniciativas, pasa por la construcción de significado para las nociones concernientes y su estructuración y memorización se facilita en el proceso.

b) Para ello, la construcción de significado debe ser una meta explícita para el profesor.

Pregunta: ¿Cómo verificar que tal significado se está construyendo en realidad?

Una segunda hipótesis:

Para este propósito, es posible encontrar problemas contextuados con dominio en el interior o en el exterior de la matemática que son familiares a los estudiantes, de forma que ellos puedan abordarlos con su conocimiento ordinario (incluyendo algunos elementos matemáticos) pero en los que se tenga que tratar apropiadamente con piezas específicas de conocimiento matemático ("dimensión herramienta" de las matemáticas).

Se tiene un mecanismo que favorece el control si hay un conflicto entre la información colectada desde diferentes fuentes y la resolución del conflicto puede ser obtenida a través de razonamiento matemático (ver la Sección 2 más abajo).

Pensamos que el profesor puede encontrar allí una forma, como un dominio de estudio y pensamiento, de que las matemáticas se conviertan en un asunto crucial en su interjuego con los estudiantes en caso de que previamente no haya sido así.

Una tercera hipótesis:

Para la mayoría de los estudiantes, la estructuración de su conocimiento matemático requiere una intervención específica y explícita de su profesor.

Una cuarta hipótesis:

A fin de que en el curso de sus estudios escolares los estudiantes desarrollen un conocimiento matemático en esta doble dimensión, como herramienta y como objeto, es necesario que tenga lugar una vida matemática a largo plazo en la clase, donde los aspectos de herramienta y objeto evolucionen dialécticamente. Esta meta debiera ser un "contrato de clase".

Un elemento importante en este interjuego al interior de la clase es la interacción socio cognitiva. De esto se trata en la siguiente sección.

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

2. Interacciones socio-cognitivas en la solución de un problema espacial en *"high school"* (nivel medio superior)

La aproximación Piagetana a los fenómenos cognitivos enfatiza la necesidad de "fases de desequilibrio", seguidas de reequilibrio, cuando un individuo construye su conocimiento. Para Bachelard [2], un nuevo conocimiento es construido contra un conocimiento previo que ha probado ser insuficiente o inadaptado. Algunas investigaciones han mostrado que tales procesos pueden ser favorecidos por situaciones que impliquen interacciones sociales entre los estudiantes. Tal caso es producido por una situación problema que guía la expresión de un conflicto socio-cognitivo, suponiendo que se han llenado ciertas condiciones (Perret-Clermont, [20]).

Ejemplificamos ahora tales procesos en una situación relativa a la enseñanza del espacio geométrico a nivel *high school*.

2.1 Introducción

Nuestro ejemplo (ver 2.3 más abajo) fue parte de una investigación acerca de las relaciones entre los estudiantes de *high school* (grados 10-12) y las "figuras" geométricas del espacio, emprendidas por el grupo "la geometría en high school" perteneciente al equipo de investigación DIDIREM de la Universidad Paris-7 (Colmes [6], Parzysz [17]). Esta encuesta primero estudió los dibujos ("figuras") hechos por los estudiantes de high school para representar situaciones geométricas espaciales, y ver el modo como ellos entendían los diagramas usados en los cursos de geometría del espacio. Un primer resultado fue que la clasificación Piagetana en tres estados sucesivos - y jerárquicos - (Piaget & Inhelder [21]) no parecían ser adecuados para describir una relación del individuo con la representación del espacio. Alternativamente fue propuesto un modelo (el modelo conocer/ver), consistente en dos polos antagónicos, llamados "ver" (percepción) y "conocer" (conocimiento) entre los cuales debía encontrarse un balance que representara una situación espacial. Este balance depende de múltiples factores, entre los cuales está la materia de la representación, su propósito, el receptor -supuesto o real- y la competencia \`técnica´ del individuo (Parzysz [16], [18]). Una consecuencia es que la comunicación a través de dibujos, figuras o diagramas, como cualquier otra clase de comunicación, implica una connivencia entre los dos protagonistas involucrados, basada en este caso en una \`cultura´ común sobre las representaciones. Esto no está en contradicción con el hecho de que los niños pequeños están en posibilidad de realizar representaciones \`convencionales´ de un cubo, dado que éstas son meras reproducciones de un estereotipo, lo cual no implica un dominio de los principios de representación (Dolle [8]). Estos resultados fueron confirmados a través de una investigación subsiguiente que involucró estudiantes desde 3º hasta 10º grado (Colmez & Parzysz [7]).

Paralelo a esto, un estudio de los diagramas encontrados en libros que tratan con la geometría del espacio a través de tres siglos (desde principios del siglo XVII hasta el final del siglo XIX) mostraron que el modelo conocer/ver también se aplicó en ellos y que la tradición actual en la representación de las configuraciones espaciales en geometría resultó de una solución comprometida entre "ver" y "conocer" y no desde la advertencia de un status geométrico. Comenzando desde los resultados de esa parte del estudio, la enseñanza de la geometría del espacio en los grados 10 y 11 fue entonces concebida e implementada, empezando por intentar englobar la enseñanza explícita de algunas reglas de dibujo junto con la enseñanza de las reglas usuales de la geometría espacial y - por supuesto - el desarrollo de habilidades espaciales entre los estudiantes.

Tal concepción `global de enseñanza´ estuvo motivada por tres razones principales:

- *Primera*; porque los diversos aspectos de aprendizaje mencionados antes (espacio, geometría y representaciones) están conectados, e interactúan entre sí (Osta [15]).
- *Segunda*; por los diversos tipos de representación tradicionalmente usados en la enseñanza de la geometría espacial: visión a ojo de pájaro, frontal, vistas superior y de perfil ..., todas pertenecientes - al menos en un modo formal - a la perspectiva paralela (o cilíndrica), aún cuando estas afirmaciones difícilmente se encuentran en los libros de texto.
- *Tercera*; por lo poco que se ha dicho acerca de cómo construir e interpretar tales representaciones; a lo más se dan algunas indicaciones como "convencionalismos de dibujo" aunque muchas de ellas son de hecho propiedades de proyecciones paralelas.

Un resultado de esta situación es que las representaciones son usadas generalmente de una manera muy pobre tanto por profesores como por estudiantes, aunque se pudiera tener un uso mucho más valioso en la resolución de problemas, así como en la construcción de conceptos geométricos, y pudieran incluso ser fuente de problemas geométricos.

Otra especificidad de esta investigación fue el uso constante de modelos 3-dimensionales. La idea básica fue que en la geometría del espacio, contrario a la geometría plana, hay una enorme brecha entre la situación y su representación por diagramas; así, los modelos pueden reducir esta brecha porque:

- son una abstracción del problema `real´ estudiado;
- sin embargo, son, de alguna manera, `isomórficos´ con la situación física.

Más aún, aunque esta situación comúnmente pertenece al macro-espacio (i.e. involucra objetos `grandes´), un modelo 3D de él pertenece al micro-espacio, y así brinda una posibilidad de seleccionar varios puntos de vista, lo cual no siempre es posible con la configuración inicial. Por ejemplo, si los estudiantes tienen que estudiar una situación que involucra su propio salón de clases en un problema que requiere construcciones y medidas efectivas, pueden en principio darse cuenta, y después usar un modelo del salón que hará más fácil el estudio del problema (construcciones, medidas).

2.2 El marco teórico

Con el fin de traer estas ideas a la realidad, fue necesario encontrar algunas situaciones problema que llenaran las condiciones mencionadas, las cuales permitieran a los estudiantes construir una buena relación con el conocimiento relevante. Otra idea principal fue favorecer las interacciones entre los estudiantes, con el fin de provocar concepciones personales para dar lugar y generar discusiones abiertas sobre ellas, conduciendo hacia la formulación de conjeturas y hacia el avance de los procesos de verificación de esas conjeturas. Se esperaba que estos debates produjeran "reglas de acción" y "teoremas en acto" (Vergnaud [23]) acerca: 1º Geometría del espacio y 2º la representación del espacio, estas reglas fueron institucionalizadas después.

Debemos hacer alguna aclaración acerca del marco teórico en el cual estuvo imbuida esta investigación. De un modo general esta ingeniería didáctica (Artigue [1]) intentaba hacer uso de una "dialéctica herramienta-objeto" (Douady [9]). Esta expresión se refiere al proceso en el cual una pieza de conocimiento dada es usada al principio como una herramienta implícita para resolver un problema, y luego, como un objeto de estudio, cuyas propiedades son estudiadas sistemáticamente. Más tarde, este objeto es a su vez susceptible de ser usado como una herramienta explícita para la solución de otros problemas.

Se requieren algunas condiciones para proponer un problema a los estudiantes, en particular:

- el conocimiento pretendido debe ser \`una buena herramienta´ para que los estudiantes resuelvan el problema;
- los estudiantes pueden empezar con una solución del problema partiendo de su propio conocimiento existente (tanto académico como no académico).

Más aún, para ser eficientes, la implementación de tales procesos requiere una administración apropiada del salón de clase en el cual los roles respectivos del profesor y de los estudiantes estén bien definidos y varíen a través del tiempo:

- en las fases de aprendizaje, los estudiantes deben tener la posibilidad de hacer conjeturas, de formularlas y (también tratar) de validarlas a través de la discusión;
- en las fases de enseñanza, el profesor está al frente.

También debe hacerse notar que la evaluación del aprendizaje no ocurre sólo después de las fases de enseñanza, sino que empieza desde las fases de aprendizaje, en la medida en que el profesor pone atención a los argumentos usados por los estudiantes. Ya que estas fases están basadas esencialmente en estas interacciones sociales entre los estudiantes son condiciones favorables para la emergencia de concepciones (tanto correctas como inadecuadas) y para su identificación como tales. Más aún, ello permite la apropiación de conocimiento por los estudiantes, como veremos en el ejemplo que se discute adelante.

2.3 La situación problema

A partir de una experiencia previa (Colmez [6]), hemos llegado a la idea de que el estudio de las sombras proyectadas sobre un plano era una situación conveniente tanto para la representación espacial como para las reglas de geometría. Pudiera haber parecido más fácil empezar con las sombras proyectadas por el sol, ya que es una concretización buena de proyección paralela; pero una primera experiencia ha mostrado que algunos estudiantes tuvieron dificultad en admitir que los rayos del sol que caen sobre un objeto son paralelos ("ellos divergen desde el sol"). Este obstáculo nos guió a empezar con las sombras proyectadas por una lámpara, que es, de hecho, una proyección central (incluso si no deseamos hacer de esto un objeto de enseñanza). Entonces desarrollamos la idea del siguiente artefacto (ver Figura 1): fijamos a una mesa (0.6 m x 0.8 m) una antena telescópica con un foco eléctrico en su extremo superior (la energía fue proporcionada por una pequeña batería). Sobre la mesa yace el `esqueleto´ de un cubo (hecho con varas de unos .20 m de longitud), con su cara superior pintada de rojo. El problema es, si pudiéramos obscurecer el salón de clases, imaginar cuál sería la forma de la sombra del "cuadrado rojo" sobre la mesa. Fue elegida esa situación porque pensamos que haría que surgieran concepciones ingenuas, guiando hacia contradicciones, del mismo tipo como aquella que previamente habíamos encontrado: el hecho de que los rayos del sol divergen desde el sol (lo cual es cierto) contradice aparentemente el paralelismo de los rayos del sol que puede ser observado diariamente.

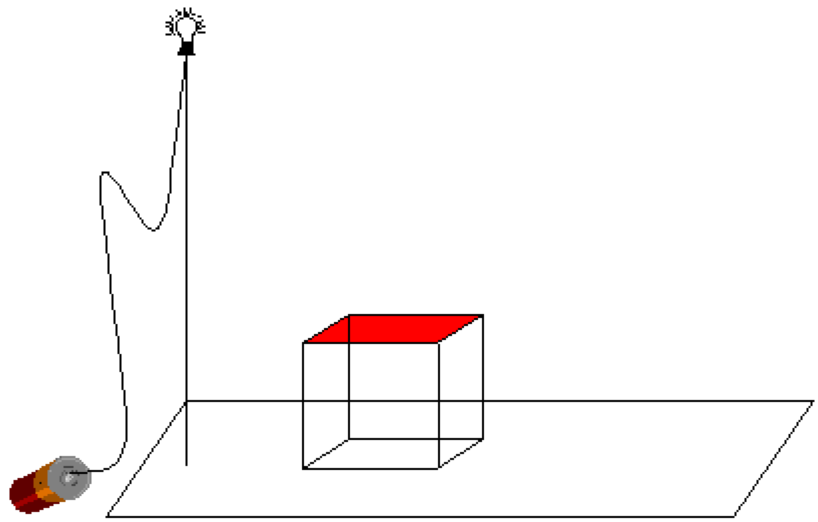

Figura 1

En el presente caso, pensamos que el desarrollo de concepciones ingenuas está basado principalmente en las sombras de objetos verticales (gente, postes eléctricos ...), y que este hecho guiaría a contradicciones si los estudiantes fueran requeridos al estudio de las sombras de un objeto horizontal (el cuadrado rojo). Desde este punto de vista, la elección de un cubo fue motivada por dos razones principales:

- este objeto geométrico es bien conocido por los estudiantes;
- cuando el cubo descansa sobre un plano horizontal, esto comprende líneas verticales tanto como horizontales, y juzgamos que esta es una característica favorable para la emergencia de contradicciones (ver arriba).

2.4 La implementación (parte 1)

Describimos aquí el progreso de la secuencia en un caso aislado, aunque ha sido experimentado varias veces, con estudiantes de 10º y 11º grados. El estudio de

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

casos ha mostrado que la situación es extremadamente `estable´, pues las condiciones locales no influyen su desarrollo general.

Primer acto: El artefacto, sobre el escritorio del profesor, primero es descrito a los estudiantes, quienes primero deben dar respuesta individual a un cuestionario. Mediante esto, quisimos que fueran usadas y escritas las concepciones individuales, permitiendo a cada estudiante (y no sólo a los `líderes´) dar su opinión y constituir una plataforma que:

i. pudiera ser verificada subsecuentemente por el profesor, con el fin de proporcionar un acceso a estas concepciones, y:

ii. recordaría a cada estudiante su punto de partida acerca del problema, involucrándolo más clara y profundamente en el subsiguiente debate.

Las preguntas fueron las siguientes:

- ¿Cuál es la forma de la sombra del cuadrado rojo cuando el cubo descansa en una posición dada (algunas son muy particulares y otras más generales)?
- ¿Qué sucede al tamaño de esta sombra cuando el poste es alargado?
- ¿Qué ocurre al tamaño de esta sombra cuando el cubo es alejado del poste?

Cuando el cuestionario es completado, se hace un conteo colectivo de respuestas, lo que muestra su gran diversidad, por ejemplo, la respuesta correcta para la forma ("*es un cuadrado en todos los casos*") es dada por menos de un estudiante en diez (pero, por supuesto, no se dice nada acerca de cuál es la respuesta adecuada). El descubrimiento de la multiplicidad de respuestas aguijonea a los estudiantes ("*¿cómo puede haber tantas opiniones diferentes sobre una situación tan simple?*") y el problema -que al principio era del profesor- se transforma ahora en su problema (este cambio es conocido como *devolución* del problema a los estudiantes).

Segundo acto: Puede empezar ahora una discusión colectiva sobre las variadas respuestas dadas por los estudiantes a la misma pregunta. En esta fase, el rol del profesor consiste sólo en hacer que las contradicciones entre estas respuestas aparezcan claramente, y en pedir a los estudiantes que expliquen cómo llegaron a sus conclusiones. Algunas posiciones son discutidas en una forma muy convincente por sus autores, pero, sin embargo, se mantienen en contradicción: por ejemplo, la sombra del cuadrado rojo no puede ser, al mismo tiempo un trapecio ("porque los rayos divergen del foco eléctrico") y un rectángulo ("son preservados los ángulos rectos, porque el cuadrado es paralelo a la mesa")[1]. Según la teoría de Piaget, estamos en una fase de desequilibrio, la cual se ha hecho explícita para todo mundo, gracias a la expresión de las diferentes -con frecuencia contradictorias- posiciones hecha posible por la puesta en juego de la discusión colectiva.

En realidad existe una forma que pudiera resolver los problemas de una vez y para todos: obscurecer el salón y prender el foco; pero esta manera no se permite (dice el profesor). Y él pregunta: *¿De qué otra manera podríamos saber*? Ahora tiene lugar una fase de reflexión, individual, o, más frecuente, con el vecino.

N.B.: También usamos la misma situación problema varias veces en los cursos de capacitación para profesores de matemáticas en servicio. Sus respuestas al

[1] Por supuesto, hablando matemáticamente, un rectángulo es un trapecio particular, pero en el presente contexto los estudiantes usan la palabra "trapecio" como opuesto a la palabra "rectángulo" (un trapecio tiene, en este sentido, dos lados paralelos y dos lados no paralelos).

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

cuestionario son totalmente comparables a las que dieron los estudiantes de 10º grado; este fenómeno ha sido verificado en varias áreas (matemáticas, física, biología, ...): cuando los `expertos´ se enfrentaron con un problema inusual -incluso al interior de su propio dominio- reaccionaron con mucha frecuencia de manera muy parecida a los no especialistas. Sin embargo, en los debates subsecuentes (pero no en el cuestionario, excepto ocasionalmente por un participante) apareció generalmente la referencia a la homotecia: el cuadrado rojo y su sombra son homotéticos, con el foco eléctrico como centro. El problema se arregla a partir de que todos los participantes reconocen la situación como uno en el cual está involucrada la homotecia. Pero por supuesto, tal conclusión no puede ser obtenida por los estudiantes de 10º grado, porque ellos no tienen este conocimiento a su disposición.

2.5 La implementación (parte 2)

Tercer acto: Ya que no está disponible una experimentación `real´, algunos estudiantes piensan en reemplazarla por una simulación, y proponen usar reglas o cuerdas para materializar los rayos luminosos, ajustándolos desde el foco y a través de una esquina del cuadrado rojo, pudimos saber en donde llegará sobre la mesa, i.e. dónde está la sombra de la esquina. Esto es hecho rápidamente por dos estudiantes que vienen al escritorio para ajustar ligas sobre el artefacto (ver Figura 2), con la ayuda de alfileres (ligas y alfileres son proporcionados por el profesor, quien se ha anticipado a la acción). La idea de caer en una simulación siempre es generada por los estudiantes, porque esta es cercana a la experimentación real (la que, en su opinión, debiera ser decisiva) y descansa sobre el lado experimental. Este experimento muestra un resultado más sorprendente en comparación con las respuestas al cuestionario: el artefacto es inclinado sobre un lado, de tal forma que permita a todos los estudiantes ver la figura delimitada por los cuatro alfileres materializando la sombra de las esquinas, y todo mundo puede ver que "la sombra se parece a un cuadrado".

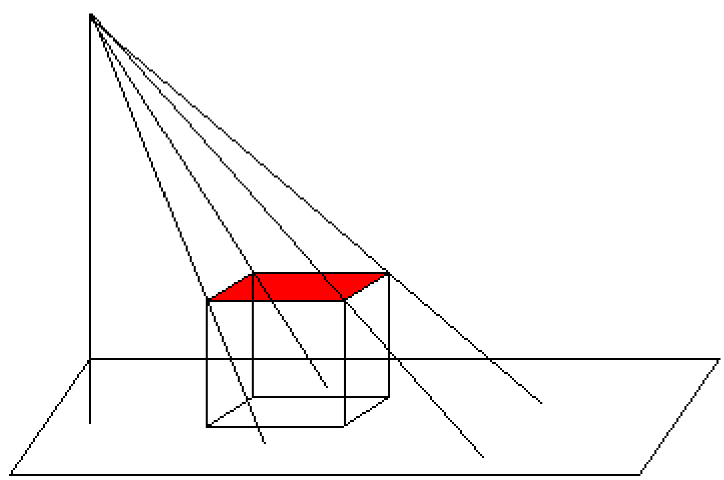

Figura 2

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

Pero la precisión del método (prueba pragmática) no es suficiente para lograr la certeza: algunos estudiantes no están de acuerdo y se aferran a su primera posición, así pues debe ser procurado otro tipo de prueba. El profesor reformula la pregunta en otra forma: ¿L*a sombra del cuadrado rojo es realmente un cuadrado*? Y pide a los estudiantes un argumento que pudiera convencer a todo mundo.

Después de otro período de reflexión, durante el cual los estudiantes observan desde sus asientos el artefacto (son las ligas puestas) y discuten con su vecino(s), y otra vez se da una fase colectiva: los argumentos dados por los estudiantes son ahora sobre el lado geométrico: su vocabulario es -al menos parcialmente- geométrico (línea, plano, triángulo ...) y hacen uso:

- Implícitamente, de propiedades geométricas del espacio, las cuales de hecho son reglas de acción (la intersección de dos líneas definen un plano, la intersección de dos planos paralelos con otro plano son líneas paralelas ...)
- Explícitamente, nociones y propiedades del plano geométrico conocidas previamente por ellos (teoremas sobre líneas paralelas, planos homotéticos, vectores) cuando consideran una sección plana.

También usaron el pizarrón para dibujar figuras para mostrar a otros (que pedían dibujos) de lo que estaban hablando; estos dibujos eran en su mayoría configuraciones planas de la situación espacial en juego.

Debe hacerse notar que el inicio de un proceso de demostración no es sencillo, porque los estudiantes no ven cómo tratar con el espacio. Entonces, el cambio desde el espacio al plano ("cambio de contexto de trabajo" (Douady [9]) con frecuencia tiene que ser insinuado por el profesor. Pero, una vez que los estudiantes toman la idea, sus argumentos se mueven fácilmente del espacio al plano y viceversa, usando como herramientas, en un caso el conocimiento escolar (geometría plana y dibujo) y en otro caso conocimiento no académico, sobre el espacio y sus representaciones.

Finalmente, a través de varias correcciones y realizaciones sugeridas por los estudiantes (el rol del profesor está aquí muy restringido), se encuentra colectivamente un camino para la prueba de la conjetura, la cual parece atender a un acuerdo general (para más detalles, ver (Parzysz [17, [18]). No es aún una demostración (en el sentido matemático), pero ha sido realizada con una idea general.

Cuarto acto: El profesor resume el proceso de prueba que recién ha sido construido, y enfatiza los puntos de acierto sin una justificación (geométrica). Estos puntos son de dos tipos:

- los estudiantes conocían suficientes teoremas de geometría plana, y pudiera haber sido dada una justificación *teórica*, pero no hubo. La brecha fue llenada fácilmente sin dificultad.
- algunas afirmaciones en el espacio geométrico fueron admitidas sin protestas por los otros estudiantes (por ejemplo "consideremos el plano formado por dos ligas", "la sombra de AB es paralela a AB porque el cuadrado rojo es paralelo a la mesa", etc.), pero en este caso no existe teoría de soporte para esas afirmaciones (al menos, aún no). Subsecuentemente, el profesor institucionaliza las afirmaciones, i.e. él decide que -junto con algunas nociones y definiciones `primitivas´ estas afirmaciones, una vez transformadas para adecuarse con estas nociones,

serán parte de aquello que ahora será llamado "espacio geométrico" como "teoremas". Por ejemplo, puntos, líneas rectas y planos serán nociones primitivas, y las siguientes oraciones (que son transposiciones de las afirmaciones de los estudiantes citadas arriba) serán teoremas:

(T1) *La intersección de dos líneas determina un plano*.

(T2) *Las intersecciones de un plano con dos planos paralelos son líneas paralelas*.

Por ahora, las reglas de acción se han transformado en teoremas genuinos, y pueden ser usados como tales. Estos son apuntados en los cuadernos, y entonces integrados a la `memoria de la clase´. En esta fase (institucionalización), el profesor está al frente, ya que él decide cuáles afirmaciones serán teoremas y cuál será su formulación. Sin embargo, es importante negociar este `estado legal´ con los estudiantes, mostrándoles que de hecho ellos los usaron en sus propios argumentos - aunque de una manera informal. Algunos de los nuevos teoremas (tales como T1) serán admitidos, y algunos otros (como T2) demostrados, usando teoremas tanto de geometría plana como de geometría del espacio, pues es importante que los estudiantes vean por sí mismos que estos teoremas son útiles para las actividades; esto es una parte esencial para su legitimación. Pero lo que ha sido resuelto por ahora es sólo una parte del problema inicial (i.e. la forma de la sombra); la cuestión de su tamaño aún está abierta (ver el cuestionario anterior). De hecho, esto aparece con frecuencia como un producto final en los primeros estudios, cuando se probó que la forma de la sombra era un cuadrado en el que intervinieron figuras en las que se representaba el poste (Figura 3). Cuando no es este el caso, el profesor recuerda a los estudiantes esta pregunta; esto guía a otra fase colectiva, muy similar a la anterior, pero más corta y usando los nuevos teoremas como herramientas.

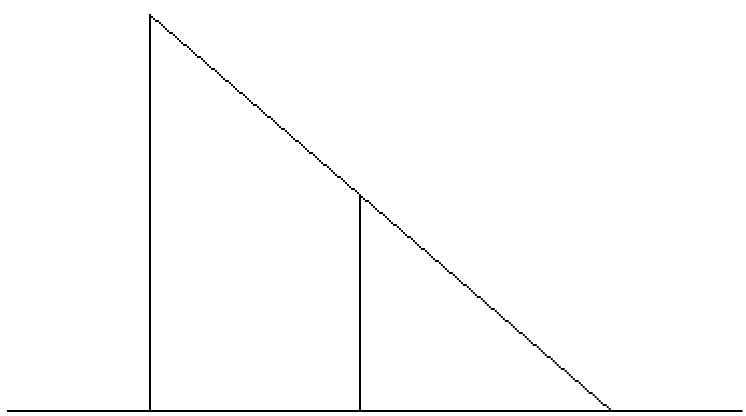

Figura 3

2.6 Naturaleza y rol de las interacciones socio cognitivas

La corta secuencia, apenas descrita, fue incluida en una progresión más larga que se extendió por varios meses. Esta secuencia fue seguida por otros, que intentaron, al cambiar de las sombras del foco a las sombras del sol, tratar tanto

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

con la cuestión del dibujo como con la institucionalización de otras definiciones y teoremas en el espacio geométrico (Parzysz [17]). Pero ahora daremos una atención especial a los actores de la primera situación, i.e. el profesor y los estudiantes.

En tal situación, el rol del profesor es obviamente fundamental, en primer lugar antes de empezar la secuencia (ya que elige la situación problema que habrá de ser `vivida´ por la clase), pero también durante su progreso. Algunas veces él actúa como el líder del grupo (estableciendo el problema, institucionalizando los resultados que vale la pena recordar); también puede provocar un cambio hacia otro campo matemático, u otro registro que proporcionará a los estudiantes un punto de partida para una demostración (en el caso presente se movió del espacio a la geometría plana). Pero en otros momentos él debe tratar de ser discreto y dejar que los estudiantes expresen sus propias ideas: en este caso, él actúa como un moderador, estimulando la expresión de ideas y siendo cuidadoso para permitir hablar a todo mundo (y no sólo a los `líderes´). Algunas veces puede ser difícil el saber qué decir (o qué no decir), con el fin de resumir una discusión entre los estudiantes sin introducir las propias ideas en ello; esto requiere una gran cantidad de paciencia y cierta `maestría´ en la situación. Nótese que, en el presente caso el profesor es ayudado por un artefacto, ya que la simulación es una mediación que proporciona una respuesta, la cual -aunque parcial- facilita la formulación de conjeturas de los estudiantes.

El profesor tiene también que insistir en las contradicciones que aparecen entre las distintas posiciones de los estudiantes (por ejemplo, la forma de la sombra en forma de rectángulo es contradictorio con la de un trapecio). El hecho de que los estudiantes se den cuenta de tales contradicciones es un reto para ellos, haciendo más fácil la devolución del problema. El profesor debe también ser muy cuidadoso con los argumentos especiosos que algunas veces son muy convincentes, pero que pueden causar un peligroso deslizamiento (Boudon [3]), e insistir sobre ellos con el fin de permitir que los estudiantes adviertan su debilidad o falacia.

Por otro lado, existen dos clases principales de interacción que competen a los estudiantes; con el profesor (respondiendo o haciendo preguntas) y entre ellos mismos. La última parece ser más importante, como pudimos ver arriba.

Más específicamente, la hechura de nuevas conjeturas surge a través de las discusiones y nuevas formulaciones del problema. Si no hay intercambio de ideas entre los estudiantes, tales procesos no tendrían oportunidad de ser realmente fructíferos. En realidad, estas discusiones permiten a cada estudiante confrontar su posición con la de los otros y, eventualmente, cambiar su punto de vista (descentración), para pensar en un argumento para o en contra de su propia opinión o la de otros, o proponer un nuevo camino.

Además, la objeción de un estudiante, o su fracaso en entender la posición de otros, fuerza después a poner en juego un argumento con el fin de convencer a otro(s) (y también a sí mismo); él hará uso de varias formas de prueba, algunas basadas sobre razonamientos más o menos formalizados, algunos más sobre una evidencia visual. Los estudiantes pueden entonces advertir que en una discusión colectiva, un argumento dado puede convencer a alguien pero no a todos, y que una prueba matemática es una clase especial de prueba, en la que se siguen ciertas reglas particulares en las que todos están de acuerdo. Más aún, tal argumentación revelará posiblemente -implícitamente- reglas de acción y concepciones personales que darán al profesor insights sobre posibles obstáculos para la construcción de conceptos, y le permitirán tomarlos en cuenta en su enseñanza posterior.

En conclusión, como puede ser visto de esto, el éxito -o el fracaso- de la ingeniería didáctica depende principalmente de dos factores:

1. La elección de la situación y su análisis antes de su implementación, desde el punto de vista del conocimiento en juego, las concepciones de los estudiantes acerca de este conocimiento y una metodología que parezca ser adecuada.
2. La administración de la clase, y los variados contratos didácticos que en realidad tendrán lugar a través del tiempo.

La elección de una `buena´ situación es importante, pero el rol del profesor, y sus interacciones con los estudiantes, parecen esenciales, no sólo con respecto a la evolución de la situación (esto puede ser, en alguna medida, dominado por la elección de una situación que no sea muy sensible a pequeñas digresiones), sino también con respecto a las relaciones de los estudiantes con el conocimiento a fijar. Desde este punto de vista, la buena administración de las interacciones con y entre los estudiantes es importante, y finalmente afecta la cuestión de la reproducibilidad de las situaciones didácticas.

En la siguiente sección, elegimos un conjunto de problemas y desarrollamos específicamente el análisis *a-priori*.

3. Ingeniería didáctica construida sobre problemas donde el álgebra y la geometría se enriquecen mutuamente

3.1 ¿De qué se trata?

La tarea es organizar una serie de sesiones de trabajo matemático donde la responsabilidad del profesor alterne con la de los estudiantes. El punto clave en la relación maestro-matemáticas-estudiante es el trabajo de los alumnos sobre los problemas que han sido elegidos por el profesor con una intención definida de enseñanza. Los problemas están sujetos a requerimientos los cuales serán establecidos más adelante.

La ingeniería ha sido arreglada de tal manera que tome lugar en varias fases, con el fin de que:

- Los alumnos debieran ser capaces de explotar sus habilidades y conocimiento numérico y algebraico. Ellos debieran ser capaces de usar su percepción geométrica y su práctica gráfica. Más aún, ellos debieran ser capaces de permitir que estos dominios interaccionen durante su trabajo.
- El profesor debiera ser capaz de proceder de acuerdo a su objetivo de enseñanza, ahorrando espacio de trabajo así como al integrar las ideas inesperadas que pudieran provenir de los estudiantes. Él entonces estará en la posición de adaptar el proyecto inicial a la nueva situación e, incluso, si es necesario, modificarlo completamente. Más aún, el profesor debiera

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

ser capaz de evaluar aquello que en realidad han aprendido los estudiantes, aquello que está explícitamente disponible para el trabajo con nuevos problemas.

Tal ingeniería didáctica debiera conducir a los estudiantes para desarrollar su conocimiento en los varios dominios involucrados en los problemas. En particular, en geometría, el *ver* debiera evolucionar hacia el *saber*.

3.2 Elección de geometría y álgebra

Ambos dominios ocupan un importante lugar en todos los currícula escolares, empezando en los principios de la escuela media, y su campo ya ha sido visitado, al menos implícitamente, con más o menos conciencia, desde los principios de la escuela elemental.

- La *Geometría* permite poner en juego convicciones íntimas, provenientes de la familiaridad con el ambiente en el que vivimos y con la percepción visual. Esta asistencia nos permite aproximarnos al problema con algunas ideas. Pero, al mismo tiempo, pudiera desviarnos o hacernos tomar un camino sin salida. Es entonces esencial tener otras herramientas a nuestra disposición con el fin de permitirnos la búsqueda hacia el progreso, asegurar el control del razonamiento y garantizar la consistencia o, al menos, advertir inconsistencias, incompatibilidades, incluso si no se ha considerado algún cuestionamiento.
- El *Álgebra* puede ser un contexto de trabajo - modelo y puede proveer de herramientas adaptadas para manejar el problema. Puede ocurrir, sin embargo, que esto se sostenga desde un punto de vista matemático, pero que el conocimiento de los alumnos en álgebra resulte ser insuficiente para la situación. En tal caso, el recurrir al razonamiento numérico o regresar a un punto de vista geométrico, posiblemente diferente del primero, pudiera destrabar la situación al sugerir un apoyo en otros métodos, tales como gráficas vistas geométricamente como una parte del plano Euclidiano.
- El *significado y el olvido del significado en álgebra*. Mientras que la referencia a un contexto es invaluable cuando se está probando el entendimiento, esto no es suficiente. El manejo exitoso del álgebra proviene del olvido de la contextualización que le dio origen, y requiere una cierta familiarización con la técnica.

Así, necesitamos tomar en cuenta la influencia de la significación en el desarrollo de algoritmos, y al mismo tiempo, trabajar hacia el desprendimiento de ella. De esta manera, es aconsejable pensar en el aprendizaje de la manipulación algebraica desde el punto de vista de un equilibrio o interacción entre la construcción de significado y una familiaridad técnica con los algoritmos.

3.3 Requerimientos para los problemas

- *La situación matemática debiera depender al menos de un parámetro*. Así, el interés por los problemas que dependen de un parámetro es diverso:
  - Desde el punto de vista matemático, este provee un mejor entendimiento de una cuestión al ponerla en un contexto más amplio. En los problemas dados más adelante (ver 3.5 y 3.8 adelante), ¿qué

hace que un rectángulo exista o no?. Esto da significado a la existencia de condiciones y dirige el proceso de solución. La investigación de varios casos particulares con diversos comportamientos proporciona puntos cruciales de su alcance y puede guiar al estudio de todos los casos posibles en su dominio de ocurrencia.

- Desde el punto de vista del profesor, esto le permite tratar con la falta de homogeneidad entre sus estudiantes. El cambio en los datos puede hacer el problema más fácil o más difícil en sus dimensiones conceptual y/o técnica. Cada estudiante trata con un problema particular, o un grupo de tres o cuatro estudiantes trabaja con tres o cuatro problemas en el campo. De cualquier forma, la clase en su totalidad trata con una familia completa de problemas.

  El trabajo sobre una familia dada de problemas, la comunicación y el intercambio entre los estudiantes a pesar de las diferencias entre los problemas estudiados, hace posible la variación cognitiva y la competencia matemática de los estudiantes. Al favorecer la circulación de los procesos de solución y debates sobre su validez y relevancia, el profesor facilita para cada estudiante el "distanciamiento" de una situación específica o proceso. En esta forma, se mantiene el proceso de descontextualización y despersonalización.

- Desde el punto de vista del estudiante, mediante la confrontación de su elección particular y las consecuencias del estudio, las concepciones son promovidas a evolucionar: por ejemplo desde la noción de *constante* a la de *variable* o *parámetro*. Esto capacita a los estudiantes para desarrollar una actitud reflexiva hacia su trabajo, y de esta manera, hacia el desarrollo de su autonomía.

  El límite de estas ventajas descansa en la administración del tiempo. Esta restricción temporal requiere también una segunda reflexión sobre la relación enseñanza - aprendizaje en el largo plazo, en una escala de años o más. Se puede decir que una pregunta puede ser planteada en un momento dado en el año, parcialmente resuelta según el conocimiento del momento y resumida varios meses después, cuando los estudiantes estén mejor equipados. Esto requiere que el profesor tome en cuenta explícitamente, en sus decisiones, la distinción que es esencial tanto en el contexto científico como en la enseñanza, entre tres actitudes del lado de los estudiantes: el *entender*, el *preguntar* y el *tratar* con una cuestión.

- *Las proposiciones tienen un significado para los estudiantes.* Esto significa que, a partir de la situación dada o de problemas enfrentados previamente, los estudiantes son capaces de asignar algún significado a cada palabra o expresión matemática que aparece en una proposición. Esto también significa que son capaces de decidir si una respuesta propuesta para una pregunta es o no es consistente con la pregunta, no necesariamente cuando si es o no es correcta (vuelta a la distinción entre entendimiento y resolución de una pregunta).
- *Los estudiantes están en posición de atacar el problema* con sus conocimientos y sus hábitos, pero las herramientas apropiadas para

resolverla completamente no están disponibles para ellos: la situación está abierta para ellos.

Algunas de estas herramientas son parte del proyecto de enseñanza del profesor. Los estudiantes debieran ser capaces de usarlas implícitamente, en función de las acciones o expresiones de convicción.

- *El problema puede ser formulado en al menos dos contextos de trabajo diferentes.* Esta condición es para el profesor una invaluable herramienta de control para proveer a los estudiantes con el significado de progresar bajo su propia responsabilidad (al menos en parte), sin ser desconcertados por aquello que es nuevo o inusual. La realización de interacciones entre diferentes contextos de trabajo es en verdad una forma de preguntar cuestiones cruciales entre aquello que es conocido y lo que es esperado, sin ser totalmente dependiente del profesor (lo que pudiera destruir el interés de poner a los estudiantes en una situación de investigación). De esta manera los estudiantes tienen oportunidad de crear nuevas cosas a partir de las que se dispone. De esta manera, el nuevo asunto obtiene una oportunidad de adquirir significado para los estudiantes y de transformarse ella misma en objeto de estudio. Entonces, el profesor tiene que institucionalizar este nuevo objeto y dar a sus estudiantes, una oportunidad de usarlo.

3.4 Interjuego entre diferentes contextos de trabajo

Un *contexto de trabajo* es un dominio matemático generado por conceptos con un doble status de herramienta y objeto, por relaciones entre estos conceptos, por sus propiedades y teoremas conocidos que los implican, con sus diferentes formas de expresión simbólica y representaciones. El modelado de un campo matemático en varios contextos de trabajo puede ser más o menos refinado según sean los problemas a tratar.

Considere un problema que puede ser formulado en al menos dos marcos de trabajo distintos, y suponga que un estudiante está tratando de resolverlo mientras que el conocimiento a su disposición es insuficiente. Entonces un interjuego entre los diferentes contextos es causado por la relación entre las diversas formulaciones del problema elegidas por el profesor para un propósito de enseñanza. La búsqueda por la solución para un problema conduce al uso de algunas herramientas que pertenecen a cada uno de ellos y a relacionarlos. La interacción proporciona nuevas preguntas, conjeturas, estrategias de solución recurriendo a herramientas o técnicas cuya relevancia no era predecible bajo la formulación inicial. Este trabajo conduce hacia una evolución de las concepciones y posibilita la creación de nuevos objetos.

Requerimientos para el interjuego entre diferentes contextos de trabajo.

Con el fin de que el interjuego entre contextos de trabajo llene plenamente la función esperada, establecemos las condiciones que consideramos como necesarias, pero no suficientes:

- que los estudiantes tengan algún conocimiento de los contextos de trabajo a los que se recurre;
- su conocimiento es parcial en vista de las necesidades del problema;

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

- ellos tienen una posición con relación a diferentes formulaciones del problema, esto es aquellas dadas en diferentes marcos de trabajo. Ellos pueden establecer alguna correspondencia entre las herramientas usadas pero tales correspondencias son imperfectas. Consecuentemente: desbalance cognitivo.

Sin embargo, estas correspondencias sugieren cuestiones y conjeturas cuyo estudio crea una presión para su mejoramiento. El progreso en el conocimiento descansa sobre las mejoras al desarrollar correspondencias y establecer relaciones.

3.5 Un primer problema

Dos números positivos a y b son fijos. Encuentre un rectángulo de perímetro 2a cm y área b cm^2.

Este problema depende de dos parámetros: los números *a* y *b*.

Por otro lado, el problema puede ser formulado en términos numéricos: encuentre dos números con una suma y un producto prescritos. Explicamos en qué circunstancias es interesante o aún inevitable introducir una formulación geométrica. Nuestro objetivo es que los estudiantes tengan alguna forma de avanzar, esto es mediante la realización de interjuegos entre los contextos de trabajo algebraico, numérico y geométrico.

El problema anterior concierne a la longitud y área de objetos geométricos. Cuando son elegidos valores numéricos para *a* y *b*, el problema puede ser entendido al final de la escuela primaria (10-11 años de edad). Pero apenas podría ser interesante para los estudiantes del *collège* (11-15 años de edad) y del *lycée* (16-17 años de edad) de quienes se espera que los procedimientos y el entendimiento esperado sea claramente diferente.

De hecho, es uno de la totalidad de un conjunto de problemas. El profesor puede elegir valores para *a* y *b*, o puede decidir mantenerlos como parámetros libres. Él es capaz de fijar su estrategia y administrar la situación como una función de sus intenciones didácticas y el entendimiento que tiene de cada uno de los estudiantes con respecto a sus matemáticas y su comportamiento social en clase.

3.6 Preguntas importantes para el profesor, preliminares a la elección específica de los problemas

- ¿Cuál es el propósito de la situación para los estudiantes: un nuevo conocimiento, un nuevo método, implementar algo que ya ha sido aprendido, articular en una situación más compleja cosas que han sido aprendidas en forma separada ...?
- ¿Qué procedimientos querrá el profesor que usen ellos? ¿Qué actitudes quiere que ellos adopten: iniciativa, comprobación, búsqueda de consistencia ...? ¿Con qué métodos de acción proveerá él a sus alumnos?
- ¿Qué significados tiene él para: registrar las acciones de los estudiantes que son efectivas; proveer una explicación para la brecha entre lo que él espera y lo que ellos hacen; evaluar su entendimiento desde el punto de vista de los objetos matemáticos y desde el punto de vista de las herramientas matemáticas disponibles?

Dependiendo de sus objetivos de enseñanza y de sus expectativas de lo que los alumnos pueden hacer, el profesor seleccionará un cierto campo de problemas. En ese campo, él establecerá los problemas que quiere que sean estudiados por cada estudiante y decidirá si los alumnos trabajarán individualmente, en grupos, o en un modelo de comunicación emisor-receptor. Él preverá las formas en las que cada estudiante puede aproximarse al trabajo: intercambio de ideas, confrontación, difusión, trabajo colectivo. Tal vez, él terminará después de todo modificando sus predicciones, o complementándolas, y revisándolas antes de tomar una posición para institucionalizar lo que fue para él, el propósito principal de la situación de enseñanza.

3.7 Intenciones didácticas: interés de la formulación geométrica

- Para los estudiantes de los primeros años de *collège* (11 a 13 años de edad), uno de los objetivos es profundizar en su entendimiento de los números. Para este propósito seleccionamos probar su entendimiento de fracciones y decimales como herramientas para aproximar tan cercanamente como ellos desearan, medidas de un tipo que aún son desconocidas para ellos: esto es medidas irracionales.

  No queremos suponer la existencia de números irracionales *a priori*. Con el fin de empezar a tratar con la cuestión de la aproximación de números irracionales a través de racionales, necesitamos introducir un contexto no numérico donde las medidas irracionales tienen una significación para los estudiantes, y así, desde un punto de vista numérico, estas medidas existen solamente para el profesor.

  La formulación geométrica en términos de rectángulos traerá la convicción acerca de la existencia de longitudes cuyas medidas uno no puede expresar sino solamente dar valores aproximados, acercándose cada vez más a aquello que se está buscando. La formulación geométrica permite a los estudiantes expresar convicciones e involucrar cierta pieza de conocimiento geométrico que está disponible, el cual, eventualmente, favorecerá el uso implícito de una propiedad "de valor intermedio". Entonces la tarea será traducir numéricamente esta existencia geométrica. El caso descrito es inusual, ya que concierne no solamente a un número, sino a la lista completa y no queda claro si esta se termina o no. El profesor y los estudiantes estarán de acuerdo en aceptar que una sucesión de valores aproximados cada vez más y más cercanos al que se está buscando es una forma de dar respuesta. Así, uno puede ser más o menos preciso de acuerdo a su paciencia. Los estudiantes exhibirán un algoritmo tal que en cada nuevo paso la precisión es mejorada.

- Para los estudiantes al inicio del *lycée* (16-17 años de edad), en adición a lo anterior, los objetivos incluyen empezar a tratar con la solución de ecuaciones cuadráticas y con problemas que dependen de parámetros.

- Para todos los estudiantes, llevar a cabo interjuegos entre los diferentes contextos de trabajo en los cuales tienen conocimiento parcial. Es posible mostrar lo científicamente fructífero de tal trabajo, por ejemplo, al extender las correspondencias entre los contextos de trabajo.

Aquí, los contextos de trabajo involucrados son: el numérico, el algebraico (incluyendo funciones numéricas y representaciones gráficas), y el geométrico.

Elegimos trabajar con magnitudes geométricas: área y perímetro de rectángulos. Esto presupone que los estudiantes están familiarizados con este contexto.

Ya que queremos una aproximación a los números irracionales a través del uso de fracciones y decimales, las medidas desconocidas están indirectamente descritas. Están presentes en las relaciones entre las medidas conocidas. Éstas se traducen a ecuaciones, y se espera que los estudiantes puedan ya manejar expresiones que involucran literales y números.

Hacia el final del *collège* o al principio del *lycée* (14 a 15 años de edad), el modelo algebraico para problemas geométricos es una aproximación a las ecuaciones cuadráticas.

El corazón del problema tiene que ver con lo que sucede mientras cambiamos las medidas. Para esto, necesitamos un contexto de trabajo que:

- nos permita representar estas variaciones, colectarlas e interpretarlas,
- sugiera selecciones para los cálculos,
- permita verificar resultados.

El contexto gráfico hace esto, y los estudiantes necesitan estar familiarizados con el uso de gráficas.

En el *lycée*, el problema nos permite tocar conceptos importantes de análisis en un contexto particular: sucesiones numéricas, expansiones decimales ilimitadas, convergencia de una sucesión. Esto provee de un primer paso hacia los números reales no racionales.

3.8 Un análisis matemático y didáctico a-priori del problema

Considere primero algunas razones para la elección de valores numéricos de *a* y *b*.

El problema tiene una traducción inmediata a términos algebraicos: resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas[2]

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

Para *a* y *b* elegimos valores enteros. Dependiendo de los valores elegidos, pueden darse tres casos:

- existe una solución y las dimensiones del rectángulo son enteras;
- existe una solución y las dimensiones del rectángulo son no enteras (irracionales) ***(sic)***;
- no hay solución

El problema es formal e inmediatamente resuelto por aquellos alumnos que dominan la teoría de las ecuaciones cuadráticas, particularmente la relación entre

[2] Desde un punto de vista didáctico, hemos presentado aquí una reducción algebraica del problema que fue formulado en función de rectángulos. Esto surge del hecho de que las condiciones: "perímetro k fijo" o "semiperímetro k/2 fijo" definen los mismos rectángulos. Pudo ser previsto que el trabajo inicial en el problema y un primer resultado de este trabajo, para los alumnos principiantes de *collège* pudo ser realizado sustituyendo una pregunta con otra técnicamente más simple pero que no involucra la generalidad del problema.

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

coeficientes y raíces. Es cuestión de resolver la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, lo cual es un ejercicio rutinario (aunque soluciones podrían no tener significación geométrica).

Preguntas interesantes surgen en el contexto numérico. Podemos explorar las posibilidades de solución para diferentes elecciones de *a* y *b*. Por ejemplo, si *a* y *b* son racionales, sabemos que las soluciones pueden ser tanto racionales como irracionales.

- ¿Es posible tener soluciones donde uno de los parámetros sea racional y el otro irracional?
- Si *a* y *b* son racionales con denominadores moderados (escritos en su forma reducida), ¿pueden las soluciones, escritas en su forma reducida tener denominadores muy grandes, en cuyo caso no estamos muy lejos de darnos cuenta que las soluciones son racionales?

Pero, para aquellos estudiantes que no saben de la relación entre los coeficientes de una ecuación cuadrática y sus raíces, la situación ofrece una oportunidad para una rica investigación que relacione aspectos diversos, que provea diferentes niveles de búsqueda y que genere nuevos cuestionamientos en diferentes contextos de trabajo.

Desde un punto de vista matemático, es una situación muy simple donde la aproximación de un irracional por irracionales se encuentra cara a cara.

Un método para encontrar la solución cuando existe es:

- Elija dos números *x* y *y* tales que $2x + 2y = 2a$ o, lo que es lo mismo, $x + y = a$.
- Evalúe el producto *xy* y compárelo con *b*.

  Si *xy* = *b*, el problema ha sido resuelto.

  Si no escoja un mejor par (*x* , *y*), y entonces uno aún mejor donde *x* + *y* =*a* y el producto *xy* se acerque a *b*. En consecuencia, ya sea que en realidad encontramos a *b*, o nos acercamos a *b* y la diferencia de *b* se disminuye gradualmente y se acerca cada vez más y más a cero, o los valores parecen estabilizarse y *b* es inaccesible.

Los contextos de trabajo

- *geométrico*: rectángulos, lados, dimensiones (i.e. longitud de los lados), perímetro y área son objetos movilizados, presentes directamente (perímetro, área) o indirectamente (dimensión) en la proposición del problema.
- *algebraico*: ecuaciones, incógnitas, soluciones de una ecuación, sistemas de ecuaciones, son herramientas para la formulación del problema en una manera distinta.
- *funcional*: la variación de dos variables ligadas por una relación (aquí una relación afín de la forma *y* = *ax* + *b*) y el método de determinar dos variables regidas por dos relaciones correspondientes, son estudios intermedios para tratar con el problema en su formulación algebraica.
- *gráfico*: toma elementos del contexto geométrico y también del numérico. Provee un modelo geométrico del rango de los problemas planteados, a

través de un conjunto de puntos del plano Euclidiano referido a ejes ortonormales. Algunas herramientas de geometría como alineación de puntos, simetría, intersección de curvas, son adaptadas para usarse en la situación. Las coordenadas de los puntos son números, y la interpretación gráfica para las variaciones registradas tanto como las representaciones gráficas de una función afín, son recursos para el estudio intermedio.

- *numérico*: enteros, ciertas fracciones, decimales, junto con la noción de orden y sus operaciones son herramientas básicas en todas las etapas de la investigación.

Las herramientas

i. *Herramientas disponibles para los estudiantes*. El conocimiento en diferentes contextos:
   - *La geometría*: un cierto entendimiento de los rectángulos y las relaciones entre dimensiones, perímetro y área.
   - *Los números*: un buen entendimiento de enteros, cierto entendimiento técnico de decimales y algunas fracciones, y también "entre cualesquiera dos decimales, existe otro decimal" junto a una manera de designar tales números. Por supuesto, referente a los irracionales, se supone que nada es conocido.
   - *El álgebra*: habilidad para designar con literales valores numéricos desconocidos, en correspondencia a los contextos desde los cuales los estudiantes les dan sentido, habilidad también en la escritura de relaciones que conjugan literales y números.

ii. *Práctica en el contexto gráfico*. La representación de pares numéricos (x , y) ligados por una relación.

   Aquí la relación es $x + y = a$ y posiblemente aquellos pares (x , y), tales que $xy = b$, estas representaciones pueden estar separadas o en la misma gráfica.

iii. *Herramientas a crear*.

   Considere la siguiente proposición: *De todos los rectángulos posibles con un perímetro dado fijo, aquel con la mayor área es un cuadrado.*

   Este es un teorema para ser probado e institucionalizado con el fin de darle el status de objeto en el contexto geométrico. Es una pieza de conocimiento el cual puede volver a usarse en otros problemas. Para aquellos estudiantes que saben cuándo y cómo usar este teorema, este será parte de su conocimiento como una herramienta y como un objeto.

iv. Otra herramienta está implícita en el contexto funcional en un ambiente geométrico: la función que relaciona las dos dimensiones del rectángulo con su área tiene las siguientes propiedades:

   Entre los rectángulos de un perímetro fijo dado, si uno de los rectángulos tiene un área A menor que el área requerida, y otro A´ tiene un área mayor que el área requerida, entonces existe un rectángulo cuya área es igual al área requerida.

v. Puede ser establecido un método para determinar el área: busque aquellos rectángulos cuya área sea cada vez más cercana a b. Para hacer esto, elija pares (x , y) que satisfagan $x + y = a$ y calcule el producto $xy = b$. Entre estas parejas, busque dos de ellas, cuyos productos encierren a b. Si es posible seleccionen nuevas parejas (x , y) tales que los productos xy proporcionen un intervalo más restringido.

- Un problema con el método: *¿qué significados matemáticos tienen los estudiantes a su disposición para determinar un algoritmo para la selección de* (x , y)?
- Una cuestión matemática: *¿siempre es posible elegir* (x , y) *de manera que* $xy = b$*?*

Variables didácticas del problema

¿Los valores de a y b, son enteros, racionales? ¿Son pequeños o grandes?

En otras palabras, están involucradas propiedades y tamaño de los números. De hecho, dependiendo de la elección inicial de a y b el problema puede tener una solución o no. Cuando tiene solución, esta puede ser expresada por enteros, racionales o irracionales. El problema cambia fundamentalmente para las matemáticas y para los estudiantes.

Pueden ser propuestas diversas elecciones didácticas:

1. a y b son números enteros, las soluciones existen y son enteras. Por ejemplo, $a = 15$, $b = 36$.
2. a y b son enteros, las soluciones existen pero no son enteras. Por ejemplo, $a = 41$ y $b = 402$.
3. a y b son enteros, y no existe solución. Por ejemplo, $a = 39$ y $b = 402$.

Para cada categoría son posibles muchas otras elecciones numéricas. Esto puede depender de que los estudiantes tengan a su disposición calculadoras (simples, programables o graficadoras) o computadoras (con hojas de cálculo por ejemplo).

Administración de la clase.

El profesor puede elegir el dejar que los estudiantes trabajen en grupos de 3 o 4 estudiantes. A cada grupo le sería dada una pareja particular de valores (a , b). El profesor elige diferentes valores y los distribuye entre los grupos y usa la misma pareja solamente dos veces. La intención es permitir que los estudiantes comparen lo que hacen, como los métodos (usando los mismos o diferentes valores de a y b) y los diferentes valores numéricos que surgen de los dos grupos trabajando con los mismos valores de a y b. Observación: los estudiantes pudieran ser capaces de tratar con números no enteros, pero la elección de valores no enteros para a y b complica las tareas técnicas mientras que no agrega nada al nivel conceptual del problema. Esta observación cobra mayor sentido cuando buscamos una prueba de la inexistencia de una solución.

Los procedimientos que podemos esperar que se usen y que harán que avance el problema.

Aquí no estamos preocupados por los errores, obstáculos u obstrucciones que surjan de intentos aleatorios o desorganizados que ocurren cuando se empieza a trabajar sobre el problema, sino solo de los procedimientos serios y realmente observados en la fase de organización de la investigación y en la ordenación de los datos entremezclados.

Primera elección para *a* y *b*. Empezando con

$$\begin{cases} x+y=15 \\ xy=36 \end{cases}$$

busque dos números cuya suma es 15 y trabaje su producto. Seleccione aquellos que hacen 36.

El método es equivalente si son considerados en orden inverso, producto y suma.

Un pequeño número de intentos sobre los números enteros, rápidamente conduce al resultado.

Segunda elección numérica para *a* y *b*. Considere ahora

$$\begin{cases} x+y=41 \\ xy=402 \end{cases}$$

El usar el mismo procedimiento que antes consumiría una gran cantidad de tiempo. Hay una gran cantidad de números enteros cuya suma es 41. Podríamos esperar que los estudiantes organizaran sus resultados en una tabla de 4 columnas: con encabezados

x	*y*	*x + y = 41*	*xy*

y que buscaran el 402 en la cuarta columna.

¡Pero no hay tal! Sin embargo, tenemos

25 + 16 = 41 25 X 16 = 400

y

24 + 17 = 41 24 X 17 = 408

Ahora, el número 402 está entre estos dos, así que podríamos esperar una interpretación geométrica de este hecho numérico y la convicción o la expresión de una pregunta: *debe haber un rectángulo entre* (26 , 16) *y* (24 , 17) o: *¿existe un rectángulo entre* (26 , 16) *y* (24 , 17); *cómo podemos encontrarlo*?

3.9 Elementos de un análisis posterior

De hecho, una primera respuesta oída de los estudiantes, ambos en los inicios del *collège* (11-12 años de edad) y al principio del *lycée* (15-16 años de edad), después de buscar a través de la tabla de resultados para las dimensiones, el perímetro y el área correspondiente es: 402 *no aparece en la tabla, no existe solución.* En réplica a la cuestión interpuesta por un observador: *¿conoces algunos otros números aparte de los enteros?* una respuesta es: *si, hay decimales, pero son demasiados. ¿Usted no querría que lo intentara con todos ellos, o sí?*. Ahora, estos estudiantes tienen cierta competencia técnica: ellos saben que entre dos números decimales existen muchos otros, y ellos saben cómo trabajar con estos números. Pero eso no les resultó de ayuda cuando se enfrentaron con una multitud de posibilidades, hasta el punto de desechar a todos los decimales y restringirse ellos mismos a trabajar con valores enteros con los que podían tratar exhaustivamente.

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

Pongámoslo de otra manera, la cuestión para estos estudiantes es: *¿cómo podemos tratar con un número infinito de posibilidades?*. ¿Cuáles son las herramientas conceptuales y técnicas que ellos necesitan para tratar con esta situación?

Con el fin de explicar la posición para aquellos estudiantes, podemos proponer la siguiente interpretación. La introducción de los decimales a los estudiantes como "enteros disfrazados" (escribiendo las longitudes de otra manera cambiando la unidad o, sólo reglas para calcular) puede conducirlos a adquirir fácil y rápidamente una razonable competencia técnica. Esperaríamos que ellos aplicaran estas técnicas, convenientemente adaptadas y que han aprendido del uso de los enteros, según su concepción de los decimales como enteros disfrazados: examinando aquí todas los casos numéricos posibles en un intervalo dado. Si la lista es infinita, como es el caso aquí, el método es simplemente impracticable. En ausencia de otra concepción de los decimales que los conduzca a buscar usando otro procedimiento, son conducidos a abandonar por sí mismos a los números decimales y a restringir el campo de investigación a casos que involucran números enteros, lo que los conduce a establecer con convicción que el problema no tiene solución. Para muchos estudiantes, la concepción de "enteros disfrazados" es un obstáculo para entender la propiedad de densidad del orden de los decimales y para usar estos números para aproximar cualquier medida o magnitud tan cercanamente como ellos quieran, y más generalmente para usarlos en contextos de aproximación.

Los dibujos y gráficas ayudan para la realización de nuevas elecciones.

Es posible construir muchos rectángulos que tengan un semiperímetro de 41 mediante un método geométrico de "compensación". Reduciendo uno de los lados por una pequeña longitud h e incrementado la otra por la misma longitud h es un proceso mediante el cual la totalidad del conjunto de rectángulos equiperimétricos puede ser construido sin la necesidad de trabajar previamente con los valores numéricos de sus dimensiones. Poniendo estos rectángulos en orden según su parte más alta, o trazando la gráfica de los puntos (x , y) con suma 41, la información es comprimida y nos permite ver tendencias (Fig. 4). Un rectángulo será representado gráficamente por las coordenadas (x , y) y (y , x), los cuales están posicionados simétricamente con respecto al primer cuadrante bisector $y=x$.

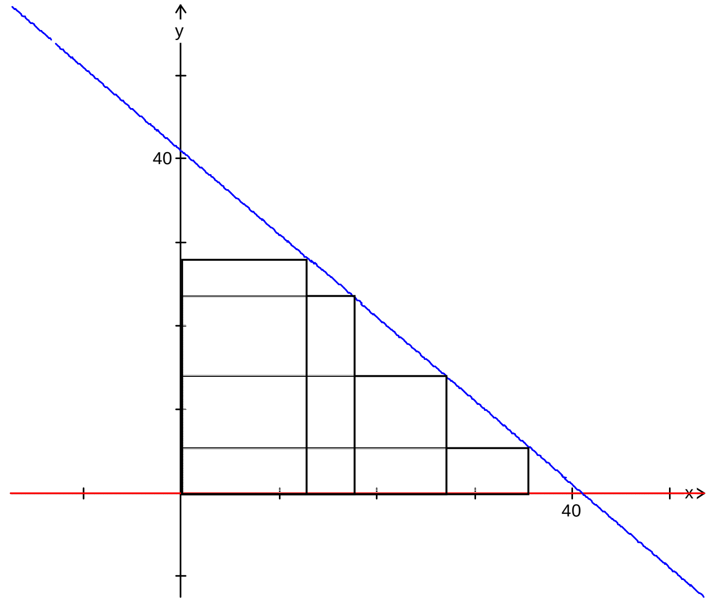

Figura 4

Comentarios casuales frecuentes

Cuando los estudiantes están trabajando sobre esta cuestión, con frecuencia dicen: *poniéndolo hacia abajo o hacia arriba, es el mismo rectángulo, pero sobre la gráfica, marcamos dos puntos*. Los pares ordenados (x , y) tales que $x + y = 41$ están representados por puntos sobre una línea recta. Existen rectángulos que no podemos poner sobre la gráfica porque no sabemos la medida de sus lados. Pero están entre rectángulos que hemos señalado. Junto a cada punto señalado en el diagrama, escribimos el área del rectángulo que le corresponde. Cuando los puntos cuyas coordenadas (x , y) y (y , x) se acercan más uno a otro sobre la gráfica, las áreas de los rectángulos correspondientes se incrementan. Al centro está el cuadrado, que tiene el área mayor.

La lectura de la gráfica produce una conjetura: conforme la diferencia entre las dimensiones se incrementa, el área se reduce. La variable significativa es la diferencia entre x y y.

La interacción entre los contextos de trabajo geométrico y gráfico permite al estudiante encontrar y explicitar la *variable escondida pertinente*.

De esta manera, ahora están en posición de realizar su procedimiento efectivamente:

- elige un número entre 24 y 25, y su pareja para hacer 41. Este estará entre 16 y 17. Encuentra el producto de estos dos números.
- repite la operación para acercarse más a 402.

Si los números son bien elegidos, la diferencia con 402 será progresivamente menor, pero, ¿será alguna vez posible encontrar 402?. La cuestión es dejada abierta al nivel de 11-12 años de edad. Sin embargo, al dejar que el entero k varíe, y mantener los valores de x y y sistemáticamente a la aproximación más baja 10^{-k},

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

podemos tener una sucesión de números cada vez mayor. Esto es visible cuando son escritos como decimales: en cada paso, un dígito más es adicionado a la forma decimal del número. Para estudiantes de más edad, este proceso puede ser usado para construir sucesiones ilimitadas de dígitos decimales, mediante los cuales podemos convencernos a nosotros mismos que tienen un número infinito de dígitos decimales no nulos, y que pueden ser sumados, multiplicados y comparados. Tenemos aquí una manera de introducir los números racionales e irracionales.

Es posible otro procedimiento dependiendo del nivel de la clase, su experiencia y la posesión de una calculadora.

- Trace las gráficas de $x + y = 41$ y $xy = 402$ en los mismos ejes.
- Estudie los posibles puntos en común.

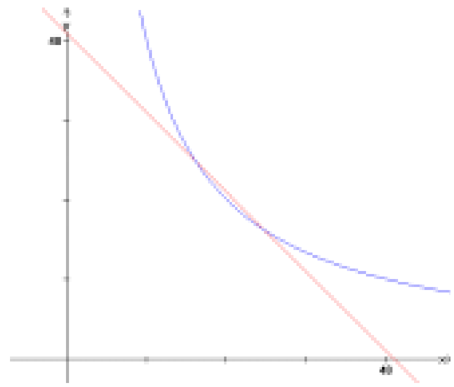

Figura 5

Tercera elección numérica para *a* y *b*:

$$x + y = 39 \qquad \text{y} \qquad xy = 402$$

- Podríamos esperar el mismo procedimiento que en los dos casos anteriores. Aquí no hay números en la tabla de resultados que encierren a 402. Todos son demasiado pequeños.
- Con el fin de incrementar el área, podemos hacer que el rectángulo sea "cercano al cuadrado" (esto se sigue como un resultado de trabajar con el problema previo), pero incluso entonces el cuadrado tiene un área menor que 402.

Surge una nueva pregunta

¿Es posible obtener un área que sea mayor que la del cuadrado?

El profesor puede proponer el problema a la clase: *elija un cuadrado, trate de encontrar un rectángulo con el mismo perímetro pero con un área mayor que la del cuadrado.*

El problema anterior está formulado en términos geométricos. Esto es ciertamente un buen contexto de trabajo para establecerlo, y los estudiantes pueden sentirse cómodos con ello. En verdad el contexto es familiar para ellos y así ciertas formas de manipular el problema les serán familiares, usan notablemente números y también transfieren el problema a gráficas. Podríamos esperar el uso de técnicas familiares cuando empiezan a trabajar sobre el problema. Esto sin duda produce

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

suposiciones por parte de los estudiantes. Algunos de los estudiantes se detendrán en estas suposiciones y llegarán a certidumbres. Otros pueden ser más creativos, e irán a examinar el problema desde un punto de vista geométrico. El escenario esperado es como sigue:

- *intentos numéricos:* ellos no serán capaces de producir tal rectángulo.
- *Representación gráfica de las parejas (x, y)*: es posible ver, como antes, que conforme nos movemos hacia el centro (*x* , *x*) el área se incrementa y que yendo más allá de (*x* , *x*) el área decrece otra vez. Esto no debiera sorprender ya que las parejas de puntos que son simétricos respecto a (*x* , *x*) representan al mismo rectángulo.
- *un estudio geométrico del problema:* el profesor pudiera pedir a sus estudiantes lo siguiente: *dibuje un cuadrado y considere transformarlo en un rectángulo con el mismo perímetro. Considere geométricamente el efecto que esto tiene sobre el área.*

Esta investigación se sigue de un estudio anterior de los rectángulos de perímetro fijo los cuales encierran un área fija.

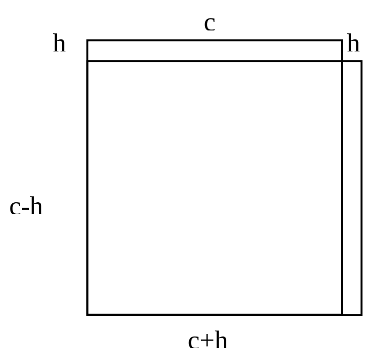

Figura 6

Ahora, si para los estudiantes un área no es simplemente el resultado de un cálculo sino tiene también significado para ellos en geometría, si pueden comparar las áreas directamente sin tener que llevar a cabo cálculos numéricos, pueden convencerse ellos mismos y obtener una prueba geométrica del hecho siguiente: Cuando nos alejamos del cuadrado comparando las pequeñas tiras (*c, h*) y (*c-h, h)* que quedan cuando cambiamos del cuadrado al rectángulo, podemos verificar que le área solamente puede hacerse menor.

Para estudiantes que están familiarizados con identidades estándar y con manipulaciones algebraicas, el razonamiento geométrico puede ser reforzado por un razonamiento algebraico: un cuadrado de lado *c* puede transformarse en un rectángulo de dimensiones $c + h$, c-h. Así el área c^2 cambia a $c^2 - h^2$ y por lo tanto debe ser menor.

Consecuencia: No hay algún rectángulo que pueda satisfacer los datos dados 39 y 402. El problema está sin solución.

Observación: Se intenta suponer que dibujar sobreimpuestos cuadrados y rectángulos es *lo concreto* mientras dibujar gráficas y usar álgebra es *lo abstracto* con la equivalencia "concreto = fácil" y "abstracto = difícil". El problema anterior lo tomamos como un ejemplo para mostrar que debemos ser cuidadosos ante la simple oposición concreto / abstracto. Preferimos hablar desde el punto de vista de

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

familiaridad: en matemáticas, lo concreto es lo que es familiar, lo que ya ha sido matematizado. Este es el caso de las gráficas: En un principio se perciben como abstractas, luego como concretas para los estudiantes que están familiarizados con los trazos gráficos y quienes tienen competencia para tratarlas con herramientas numéricas o geométricas. Como un ejemplo de una forma geométrica del problema anterior que es interesante pero no fácil de resolver geométricamente, considere: construya un rectángulo de la misma área que un rectángulo dado R y con el mismo perímetro de un rectángulo dado R´. Una buena estrategia consiste en transformar las preguntas acerca del área en preguntas acerca de longitudes. Las nociones matemáticas involucradas: propiedades de triángulos rectángulos, triángulos semejantes, son enseñadas en el *collège*. Pero el problema es aún difícil incluso para aquellos que se están capacitando como profesores.

4. Una extensión de la ingeniería

4.1 El Problema

Para estudiantes de más edad (en el nivel del *lycée*) podemos extender el trabajo previo considerando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

donde *a* y *b* con dos números arbitrariamente fijos.

En el primer problema (sección 3), hemos visto un ejemplo donde el sistema tiene una solución en los enteros, una donde no hay solución, y otra donde, desde un punto de vista matemático, la solución (*x* , *y*) puede encontrarse usando aproximaciones decimales con tanta exactitud como se requiera. Las aproximaciones a *x* tanto como aquellas para *y* vienen juntas a producir una expansión decimal ilimitada al tener un número infinito de dígitos decimales no nulos. Este tercer caso puede ser entendido de diferentes maneras por los estudiantes que trabajan en clase sobre este problema. Ellos tienen un método a su disposición, pero no saben si eventualmente habrá un final o se seguirán produciendo decimales indefinidamente. De cualquier modo, no tienen ninguna duda, en cada paso, mejoran la exactitud. Y ellos lo notan.

El profesor admite que esta expansión representa un número. Entonces, él considera este caso como un caso donde el sistema tiene una solución.

Para una representación gráfica, se usan dos colores para representar aquellas parejas (*a* , *b*) para las cuales existe una solución y aquellas para las cuales no existe solución.

No haremos un análisis detallado de este problema, sino que podemos fácilmente imaginar cómo las interacciones geométricas, gráficas, algebraicas y numéricas se pueden dar.

Consecuencias:

- Un conocimiento obtenido del trabajo sobre el primer problema es revisado y reaplicado en el problema anterior:

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

Entre todos los rectángulos con un perímetro dado fijo, el cuadrado tiene la mayor área.

- Un nuevo conocimiento emerge:

  El conjunto de parejas ordenadas tales que $a > 0$, $b > 0$ y $b = a^2/4$ divide al conjunto de parejas ordenadas en aquellas para las que el problema tiene una solución y aquellas para las cuales no hay solución. Por lo tanto:

- El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = a & a > 0 \\ xy = b & b > 0 \end{cases}$$

tiene una solución su $b \leq \frac{a^2}{4}$ y no tiene solución si $b > \frac{a^2}{4}$.

4.2 Un nuevo problema algebraico

¿Es posible extender el criterio por el cual el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

puede tener una solución a todos los valores de *a* y *b* positivos, negativos o cero?

Los objetivos del problema

Una interpretación geométrica tiene significado solamente para valores positivos de *a* y *b*. Pero traducida a formas algebraicas y gráficas, el problema puede ser extendido al plano completo.

Aquí tampoco haremos un análisis del problema. Mostramos más abajo las gráficas que juegan el rol clave en el estudio de la extensión de las condiciones para la existencia de una solución. Dejamos al lector imaginar las interacciones gráfico-algebraicas.

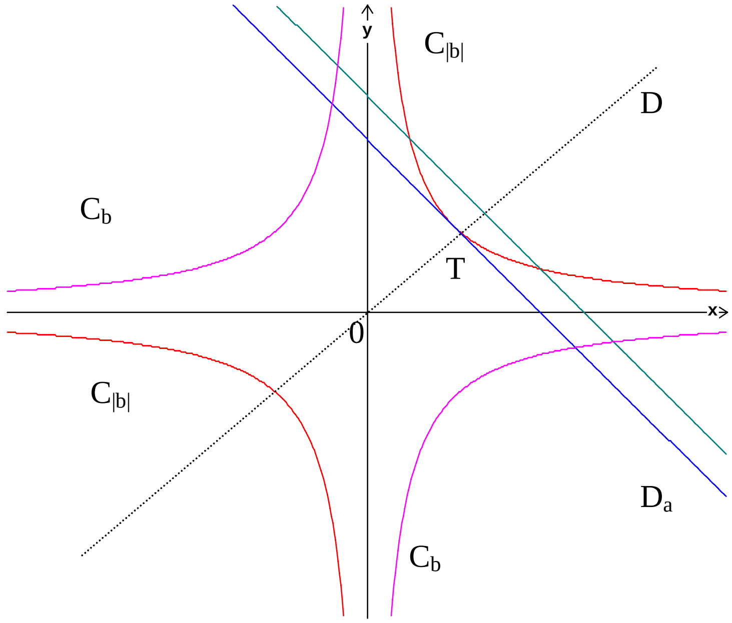

Figura 7

Si $b > 0$ la curva C_b es simétrica respecto al primer cuadrante bisector D con ecuación $x = y$. Para cualquier valor de a ($a > 0$ ó $a \leq 0$), la línea recta con ecuación $x + y = a$ tiene una pendiente -1 y es perpendicular a D. Para una elección fija de b, dependiendo del valor de a, la línea cortará la curva en dos puntos simétricos respecto a D, o será tangente a la curva en un punto T sobre D con coordenadas ($a/2$, $a/2$), o podrá no cortar a la curva en absoluto. La posición tangente corresponde al caso $b=a^2/4$.

Si $b<0$ la curva C_b es simétrica a $C_{|b|}$ con respecto al eje Y. Así, si $b < 0$, cualquiera de las líneas rectas D_a corta cualquier curva C_b en dos puntos, uno en cada rama.

Trazar las gráficas nos permite ver que para todos los valores de a y b el sistema tiene una solución dada por $b \leq a^2/4$, y no tiene solución cuando $b > a^2/4$.

La consecuencia a ser institucionalizada es entonces un método algebraico para resolver ecuaciones cuadráticas.

En resumen:

Esta ingeniería avizora el involucrar diversos interjuegos entre diferentes contextos de trabajo y conduce a enriquecer el entendimiento de los estudiantes en cada uno de estos contextos.

El contexto geométrico conduce a un teorema: *entre todos los rectángulos con un perímetro fijo dado, el de mayor área es el cuadrado.*

En el contexto numérico: *hay números no racionales, que representan longitudes o no, los cuales pueden ser designados por expansiones decimales ilimitadas.*

En el contexto gráfico, podemos usar un doble status de gráficas: por un lado simbolizando situaciones externas al contexto, y por el otro, como partes del plano, provistas con la estructura geométrica inducida por la estructura geométrica que

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

tiene el plano. Estas, pueden ser fuente de conjeturas, una guía hacia las demostraciones o una herramienta para la comprobación.

En el contexto algebraico, obtenemos un método algebraico para resolver ecuaciones cuadráticas.

Conclusión

El trabajo presentado aquí es un ejemplo de ingeniería didáctica que pone en el templete la *dialéctica herramienta-objeto*. Este también se apropia de elementos importantes de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, como la noción de "devolución" o "contrato didáctico". La ingeniería es construida empezando de problemas que dan *significado* a los conceptos matemáticos implicados. Estos problemas pueden ser abordados de diferentes maneras. Con la finalidad de estudiarlos, los estudiantes necesitan acudir a *diferentes contextos de trabajo*: geometría, gráficas, números, álgebra. El *interjuego* entre ellos ayuda al desarrollo de la sinergia entre las nociones matemáticas involucradas en el problema y el entendimiento de los estudiantes.

El contexto de trabajo geométrico permite un interjuego entre diversas dimensiones: percepción visual, convicción más profunda, razonamiento, representación simbólica. La confrontación entre las diversas piezas de información obtenida es una fuente de progreso. Se le da un lugar importante al proceso de contextualización, cambiando el contexto, reformulando el problema, ligando preguntas que provienen de diferentes proposiciones del problema, descontextualizando y también a la personalización, difusión de procedimientos o saberes personales y a la despersonalización. En otras palabras, el profesor debe actuar de tal modo que asegure el cambio del status de herramienta a objeto y viceversa. Su meta es conseguir que los alumnos sean capaces de adquirir conocimiento que, en contexto, esté disponible para ellos y lleno de significado, a fin de ser usado directamente por los estudiantes, o ser trabajado, transformado, de tal modo que ellos logren cualitativamente un nuevo conocimiento.

Con mayor generalidad, en cada nivel, las elecciones hechas por el profesor en la "puesta en escena del conocimiento" son esenciales para llevar a cabo los procesos enseñanza / aprendizaje:

- Primero, en la selección de un problema y el valor de las variables didácticas.

  El asunto es descontextualizar el conocimiento para que pueda ser usado y adquiera significación para los estudiantes.

- Siguiente, en las actividades que serán propuestas y los interjuegos entre los contextos de trabajo a los que se recurrirá, así como en la forma elegida para administrar la clase con el fin de inducir conflictos socio - cognitivos.
- Luego, en el contenido y modos de institucionalización del nuevo conocimiento, para que al tenerlo, evolucione desde el status de herramienta para resolver un problema hasta el de objeto de enseñanza.
- Finalmente, en las situaciones que más tarde permitirán reinvertir ese conocimiento en varios contextos: aplicación directa o reinversiones más complejas.

Material preparado por los Profesores Titulares del Curso de Geometría
M.C. Martha C. Villalba, M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro y M.C. Víctor M. Hernández L.
Miembros de la Planta Docence del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora para la Maestría en Enseñanza de las Ciencias del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos
bajo convenio UNISON-COSNET DAAE/01/2000.
Octubre de 2000

REFERENCIAS

[1] Artigue, M., *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 9.3, 281-308. La Pensée Sauvage, 1989.

[2] Bachelard, G., *La formatin de l´esprit scientifique*, novelle édition. Vrin 1971.

[3] Boudon, R., *L´art de se persuader des idées douteuses fragiles ou fausses*. Fayard.

[4] Brousseau, G., *Le contrat didactique: le milieu*, Recherches en Didactique des mathématiques, Repères IREM n. 10 Topiques-Edition Pont à Mousson, France, 1993.

[5] Charlot, B. & Bautier, E., *Rapport à l´école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques,* Repères IREM n. 10 Topiques-Edition Pont à Mousson, France, 1993.

[6] Colmez, F., *La représentation plane en perpective cavalière des objets de l´space, un problème de géométrie*. Journées SMF de Marseille. IREM de Marseille, 1984.

[7] Colmez, F. & Parzysz, B., *Le vu et le su dans l´évolution de dessins de pyramides du CE2 à la Seconde,* in Espaces graphiques et graphusmes d´espaces (A. Bessot & P. Vérillon, Eds). La Pensée Saubage, 1993.

[8] Dolle, J.M., *La construction représentative de l´espace volumétrique chez l´enfant (contribution à l´étude de la genèse de la perspective)*, in Bulletin de Psychologie 20, 578-589, 1974.

[9] Douady, R., *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des Mathématieus, n. 7.2, 5-32 La Pensée Sauvage, 1987.

[10] Douady, R. & Perrin-Glorian M.J., *Un processus d´apprentissage du concept d´aire de surface plane*, Educatioanl Studies in Mathematics n. 20, 287-424, 1989.

[11] Douady, R., *Des apports de la didactique des mathématiques à l´enseignement,* Repères - IREM, n. 6, 132-158, Topiques-Edition, Pont à Mousson France, 1992.

[12] Douady, R., *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*, Repères-IREM n. 15, 37-61, Topiques-Edition, Pont à Mousson France, 1994.

[13] Douady, R., *Ingénierie didactiques et évolution du rapport au savoir,* in L´enseignement des mathématics, des repères emtre savirs programmes et pratiques, 241-256, Topiques Edition, Pont à Mousson France, 1996.

[14] Legrand, M., *Le débat scientifique en mathematiques,* Repères IREM n. 10, Topiques-Edition, Pont à Mousson France, 1995.

[15] Osta, I., *L´ordinateur comme outil d´aide à l enseignemente: une séquence didactique pour l´enseignement du repérage dans l´espace à l aide de logiciels graphiques,* Thèse de doctorat, université Joseph-Fourier, Grenoble, 1988.

[16] Parzysz, B., *`Knowing´ vs `seeing´. Problems of the plane representation of sapce geometry figures,*Educational Studies in Mathematics 19, 79-92, 1988.

[17] Parzysz, B., *Repreésentations planes et enseignement de la géométrie de l`espace au lycée. Contribution à l ´étude de la relation voir / savoir*, Thèse doctorat, université Paris-7, 1989.

[18] Parzysz, B., *From shadow to light. An introduction to space geometry at senier school level*, in: Modelling, applications and applied problem solving, Teaching mathematics in a real context, 98-108. Ellis Horwwod, chichester, 1989.

[19] Parzysz, B., *Representation of space and student´s conception at high school level*, Educational Studies in Mathematics, 22, 575-593, 1991.

[20] Perret-Clermont, A.N., *La construction de l`intelligence dans l´interaction sociale*, Peter Lang, bern, 1979.

[21] Piaget, J. & Inherlder, B., *La représentation de l´espace chez l´enfant. 4e édition 1981*, Presses Universitaires de France, 1947.

[22] Robert, A. & Tenaud, I., *Résolution de problèmes de géométrie et utilisation de méthodes in terminale C*, Repères - IREM, n. 16, 29-40. Topiques-Edition, Pont à Mousson, France, 1994.

[23] Vergnaud, G., *La théorie des champs conceptuels*., Recherches en Didactique des Mathémetiques, n. 10.2.3, 133-170 La Pensée Saubege, 1991.